

М.В.Савенков

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ
МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Часть 1

Ростов-на-Дону 1997

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.В.Савенков

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Часть 1

Учебное пособие

Ростов-на-Дону 1997

С 13

УДК 621.01 (075.8)

С 13 Савенков М.В. Анализ и синтез механизмов и машин. Ч.1:
Учеб. пособие. Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ.
1997. 122 с.

ISBN № 5-7890-0038-X

В данном учебном пособии рассмотрены вопросы структурного анализа и синтеза механизмов различных классов; описаны методы кинематического исследования механизмов: графический, графоаналитический и аналитический. Динамическое исследование механизмов представлено графоаналитической кинестатикой и аналитическим методом силового исследования механизмов 2-го класса.

Пособие может быть использовано студентами всех форм обучения машиностроительных специальностей ДГТУ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Донского государственного технического университета. *и ЛМК*
не

Научный редактор д.т.н., проф. О.А.Полушкин

Рецензент д.т.н., проф. В.П.Жаров

С $\frac{2701000000 - 415}{173(03) - 97}$ 4 - 97

ISBN № 5-7890-0038-X

© Издательский центр ДГТУ, 1997

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью учебного пособия является оказание помощи студентам всех специальностей ДГТУ дневного, вечернего и заочного отделений при изучении курса "Теория механизмов и машин" (ТММ).

Курс "Теория механизмов и машин" достаточно полно изложен в ряде учебников и в первую очередь И.И.Артоболевского, К.В.Фролова, А.С.Кореняко, С.И.Кожевникова и др. Эти труды являются основой курса лекций, читаемых по теории механизмов и машин не только в ДГТУ, но и в других вузах.

Данное пособие разработано на основе учебных планов, рабочих программ, реализацию которых осуществляют преподаватели кафедры ТММ ДГТУ. При разработке пособия ставилась задача - в краткой конспективной форме представить курс лекций таким, как он излагается в учебном процессе. При этом, используя данное пособие, студенты получают возможность изучить целый ряд разделов курса подробно и в большем объеме самостоятельно.

Поставленной цели в значительной степени способствовали методические разработки, выполненные в разное время Лифшицом Я.Г., Гриньковым Ю.В., Крещиком В.С., Полушкиным О.А., Алексеевым Л.И., Мочаловым В.А. и другими сотрудниками кафедры ТММ, и обобщающие опыт более чем 55-летнего преподавания курса ТММ в РИСХМе.

ВВЕДЕНИЕ

Теория механизмов и машин - это одна из первых дисциплин, вводящая студентов в круг общих и специальных машиностроительных дисциплин. Она опирается в основном на математику и механику.

Задачей ТММ является подготовка студентов к изучению курсов: "Детали машин"; "Технология машиностроения"; "Расчет и конструирование специальных машин и устройств" и др. Следовательно, ТММ - это фундамент технического образования будущих инженеров - механиков.

В курсе ТММ студенты знакомятся с основными понятиями, которые входят в наименование дисциплины: машина и механизм. С понятием "машина" человечество столкнулось в глубокой древности. Первоначально под машиной понимали устройства для поднятия тяжестей. С развитием техники понятие машины расширилось. С появлением водяных и ветряных мельниц эти устройства также были отнесены к классу машин. С появлением паровых машин (XVIII век) произошел первый значительный скачок в развитии техники, машины перестали быть привязанными к источнику энергии.

Появились паровозы, пароходы, станки с независимым приводом. Все эти устройства также были отнесены к понятию машины. Аналогичный скачок произошел с появлением электричества.

Из приведенного обзора видно, что с развитием техники первоначальное представление машины как устройства для поднятия тяжести с течением времени должно было изменяться, расширяться.

В настоящее время мы пользуемся определением машины, которое дал академик И.И. Артоболевский: *машина - это устройство, создаваемое человеком для изучения и использования законов природы с целью облегчения физического и умственного труда, увеличения его производительности и облегчения труда путем частичной или полной замены человека в его трудовых и физиологических функциях.*

Ввиду многообразия машин в настоящее время возникла необходимость в их классификации.

Все машины можно классифицировать в соответствии с данным определением по их функциональному назначению:

1. Энергетические (электродвигатель).
2. Технологические (станки, прессы).

3. Кибернетические или контрольно - управляющие (они заменяют или имитируют различные механические, физиологические или биологические процессы, присущие человеку или живой природе и обладают элементами искусственного интеллекта).

4. Физиологические (искусственное сердце, почка).
5. Транспортные (автомобиль, транспортер).
6. Логические (ЭВМ).

При этом имеет место и классификация машин, основанная на принципе работы устройства, под которым понимается машина:

1. Механические.
2. Электрические.
3. Гидравлические.
4. Пневматические.
5. Тепловые.
6. Магнитные.

В настоящее время все чаще некоторые процессы преобразования энергии, материалов и информации выполняются машинами без непосредственного участия человека. Такие машины называют машинами-автоматами.

Совокупность машин автоматов, соединенных между собой и предназначенных для выполнения определенного технологического процесса, называется *автоматической линией*.

Машинным агрегатом называется развитое машинное устройство, состоящее из двигателя, передаточных механизмов и рабочей машины, а в некоторых случаях еще из контрольно-управляющих и счетно-решающих устройств.

ТММ занимается изучением только машин, принципы работы которых определяются законами механики, т.е. механических машин. Исследованием других типов машин, приведенных в данной классификации занимаются другие, специальные дисциплины: "Электрические машины", "Гидравлические машины" и др.

Рассмотрим другое основное понятие, входящее в наименования дисциплин ТММ - механизм.

Механизм - это система тел, предназначенная для преобразования заданных законов движения одного или нескольких тел в требуемые, для практического использования закона движения других тел.

Механизм входит в состав любой машины механического принципа действия. Например, двигатель внутреннего сгорания содержит в своем составе кривошипно - ползунный механизм, предназначенный для преобразования возвратно - поступательного движения поршня двигателя во вращательное движение коленчатого вала.

В результате следует указать, что определенные понятия "механизм", "машина", "машинный агрегат" являюся предметом ТММ как науки.

ТММ занимается анализом и синтезом механизмов и машин. Поэтому задачи анализа и синтеза являются основными в курсе ТММ.

В задачи анализа механизмов и машин входят исследования структурных, кинематических и динамических свойств существующих конструкций на чертеже или в металле для выявления их пригодности в работе.

Синтез - это создание новых, оригинальных конструкций машин и механизмов по заданным структурным, кинематическим и динамическим свойствам.

Эти задачи ТММ решает с позиции структуры (строения), кинематики и динамики. Соответственно этому в ТММ выделяются разделы:

1. Исследования структуры и классификация механизмов.
2. Кинематика механизмов.
3. Силовой анализ механизмов, динамика механизмов, машин и машинного агрегата.
4. Анализ движения машин и механизмов
5. Исследование геометрии и проектирование зубчатых передач - как особого вида механизмов.
6. Синтез механизмов по функциям цели. Многопараметрический синтез. Синтез логических систем управления.
7. Элементы теории промышленных роботов и манипуляторов.

Таким образом предмет ТММ - есть наука, изучающая общие законы строения (структуры), кинематики и динамики механизмов и машин в связи с их анализом и синтезом.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

1.1. Цели и задачи структурного исследования механизмов

Основной целью структурного исследования является правильная классификация любого механизма для выявления метода их последующего кинематического и динамического исследования, так как, определив класс механизма, мы автоматически получаем методы его дальнейшего исследования. При этом исследовании формируются общие законы строения любого механизма.

Для достижения указанных целей необходимо решить следующие задачи :

- изучить основные элементы строения механизмов,
- изучить элементы строения любого механизма,
- провести классификацию механизмов и сформулировать общие законы образования любого механизма.

1.2. Звенья и их классификация

Известно, что **деталью** называется часть механизма, получаемая без приемов сборки.

Звеном механизма называется неизменное твердое тело, состоящее из одной или нескольких деталей, не имеющих относительной подвижности.

При такой формулировке в состав звена могут входить упругие и гибкие тела, в то время как жидкости и газы, входящие в состав гидравлических и пневматических механизмов, звеньями не являются.

Идеальным звеном называют такое, деформациями которого можно пренебречь, т.е. образованного абсолютно твердыми телами.

Звено называется **входным**, если закон движения его задан.

Ведущим является звено, для которого работа приложенных к нему сил и моментов положительна.

Выходным звеном называется звено механизма, совершающее требуемое движение, т.е. то звено для создания движения которого

предназначен механизм. Это звено называют еще ведомым звеном. Остальные звенья механизмов называют промежуточными.

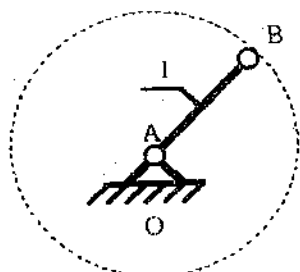
В механизмах обычно бывает одно входное и одно выходное звено.

В общем случае это сочетание может быть различным (Например, в дифференциальном механизме).

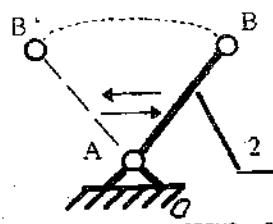
Многообразие существующих звеньев в механизмах потребовало их классификации.

Звенья классифицируют по функциональному назначению (зубчатое колесо), традиционно сохраняя название (кулачок), т.е. применяя конструктивную классификацию.

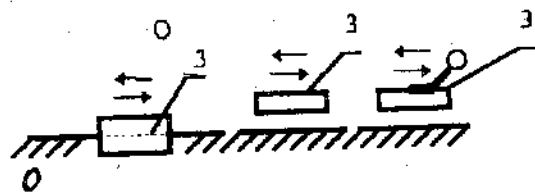
Наиболее общей является классификация звеньев по характеру их движения. Рассмотрим обозначение звеньев наиболее часто встречающихся в схемах различных механизмов:



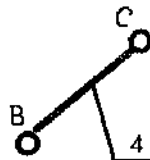
1 - кривошип - звено, совершающее полный оборот относительно неподвижной опоры O



2 - коромысло-звено, совершающее колебательное вращательное движение относительно неподвижной опоры O



3 - ползун - звено, совершающее возвратно-поступательное движение по неподвижной направляющей (O)

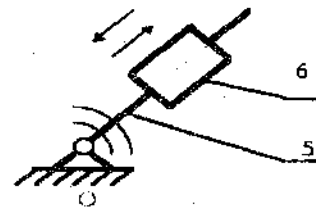


4 - шатун - звено, совершающее плоско-параллельное движение и не имеющее связи с неподвижными точками звеньев механизма

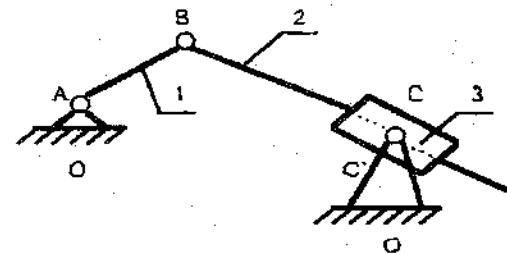
В рассмотренном примере звено 5 является кулисой - коромыслом, а звено O - стойка (станина).

Если механизм содержит только рассмотренные выше звенья, он называется шарнирно - рычажным. Из рассмотрения приведенных примеров видим, что звенья моделируются как абсолютно жесткие, недеформируемые тела.

Как правило, в составе механизма стойка (O) это единственное звено.

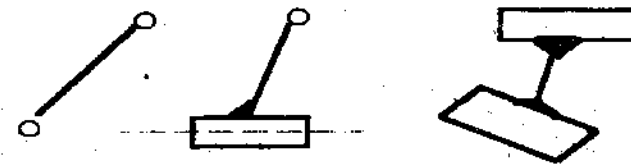


5 - кулиса - звено, являющееся подвижной направляющей для другого звена; 6 - кулисный камень, это звено, совершающее возвратно - поступательное движение по подвижной направляющей

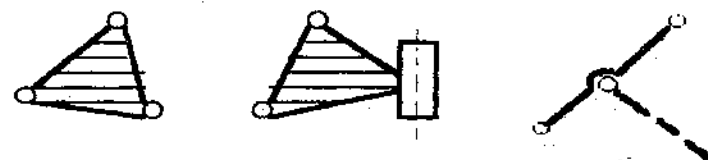


1 - кривошип; 2 - кулисный камень; 3 - кулиса-коромысло; O - стойка

Приведем примеры схематического изображения звеньев, входящих в подвижное соединение с двумя звеньями



или с тремя звеньями.



1.3. Кинематические пары и их классификация

Кинематическая пара - это подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев (соединение двух звеньев, допускающее их относительную подвижность).

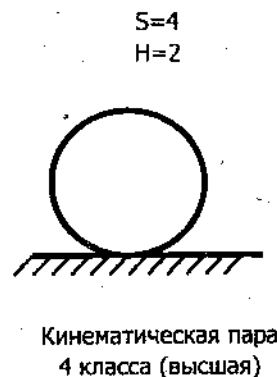
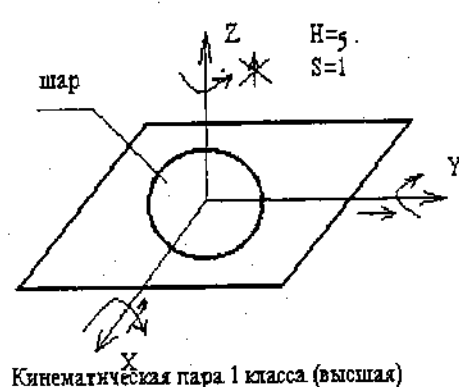
Совокупность точек, линий и поверхностей, которыми соприкасаются два звена, образуя кинематическую пару, называют **элементами кинематической пары**. На схемах кинематические пары принято обозначать заглавными буквами русского алфавита (см. схемы в п. 1.2).

Кинематические пары могут отличаться друг от друга элементами, а также числом относительных движений звеньев, входящих в кинематические пары. Ввиду их многообразия кинематические пары принято классифицировать. Различают классификации: 1) по числу условий связи; 2) по характеру (способу) контакта элементов кинематических пар.

Классификация кинематических пар по Артоблеву И.И.

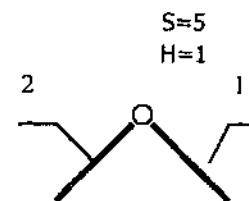
В основу классификации кинематических пар по Артоблеву положено число условий связи, которые накладываются на относительное движение звеньев при вхождении их в кинематическую пару.

Рассмотрим примеры кинематических пар.



Класс кинематической пары определяется числом условий связи, налагаемых кинематической парой на относительные движения ее звеньев.

Каждое свободное звено до вхождения в кинематическую пару с другим звеном имеет шесть степеней свободы: поступательные движения вдоль - и вращательные вокруг 3 координатных осей, в этом случае число условий связи равно нулю ($S=0$).



Кинематическая пара 5 класса (низшая)

Число условий связи, очевидно, должно быть целым числом и в общем случае число условий связи S , наложенных на относительное движение каждого звена кинематической пары, должно быть: $1 \leq S \leq 5$. Если $S=6$, очевидно, что это звено будет неподвижным.

Тогда число степеней свободы H звена, образовавшего с другим звеном кинематическую пару, выражается зависимостью: $H=6-S$.

Классификация кинематических пар по Ф. Рело

В основу классификации кинематических пар по Ф. Рело положен характер (способ) соприкосновения элементов кинематических пар.

По Ф.Рело, все пары делят на **высшие и низшие**.

В **высшей** кинематической паре соприкосновение (контакт) происходит теоретически в точке или по линии.

В **низшей** кинематической паре соприкосновение (контакт) происходит по поверхности или плоскости.

Высшие кинематические пары обладают следующими преимуществами:

1) число звеньев на единицу меньше.

2) используя высшие кинематические пары, можно получить любой закон движения для звена.

При этом высшие пары в механизмах следует применять в крайнем случае, когда без них нельзя обойтись. Это связано с их недостатками:

1. Большие удельные давления в элементах кинематической пары.

2. Трение, сопровождаемое сильным износом элементов.

3. Необходимость в создании специальных устройств для замыкания пары (для постоянного соприкосновения элементов кинематических пар осуществляют замыкание: **геометрическое** - осуществляется формой элементов кинематической пары и **силовое** - осуществляется силой веса, упругости пружины и т.д.).

4. Необходимость относительного движения в элементах высшей пары.

В целом эта классификация носит качественный характер, что является **недостатком**, так как ее невозможно представить в аналитической форме.

У плоских кинематических пар (звенья которых движутся в одной или в параллельных плоскостях) встречаются только кинематические пары четвертого и пятого класса, причем здесь пары 4 класса будут только высшие, а пары 5 класса - низшими.

1.4. Кинематические цепи и их классификация

Кинематической цепью называется связанная система звеньев, входящих в кинематические пары.

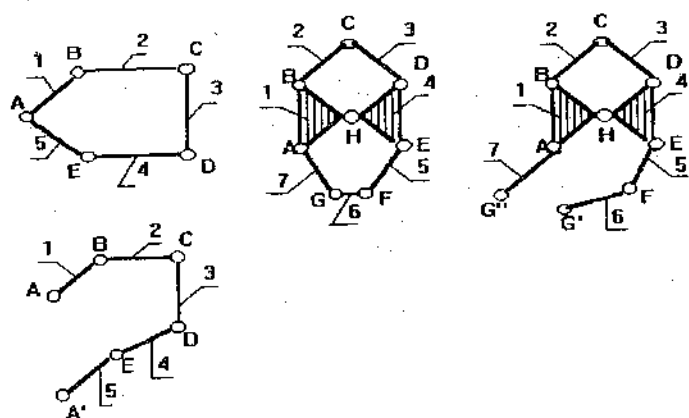
Кинематические цепи бывают плоские и пространственные.

Плоскими называются кинематические цепи, звенья которых перемещаются в одной плоскости или параллельных плоскостях.

Пространственными называются кинематические цепи, звенья которых перемещаются в пространственной системе координат.

Кинематические цепи бывают **простые** и **сложные, замкнутые и незамкнутые**.

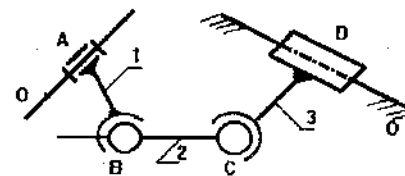
Например:



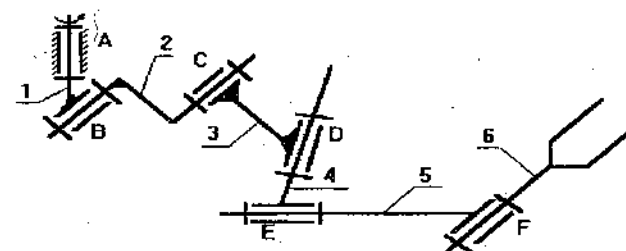
Сложной называется кинематическая цепь, звенья которой входят более, чем в две кинематические пары.

Замкнутой кинематической цепью называют ту, у которой каждое звено входит не менее, чем в две кинематические пары.

Пример. Пространственная простая замкнутая кинематическая цепь.



Пример. Пространственная незамкнутая, простая кинематическая цепь манипулятора типа "Маскот".



1.5. Структурная формула кинематической цепи общего вида и плоской кинематической цепи (К.Ц.)

Каждое свободное звено в пространстве имеет 6 степеней свободы, а K свободных звеньев имеют 6K степеней свободы.

Вхождение звеньев в кинематические пары накладывает на относительное движение звеньев определенное число связей.

Если в КЦ: P1 - число пар 1-го класса, P2 - число пар 2-го класса, P3 - 3-го класса, P4 - 4-го класса, P5 - 5-го класса, то они накладывают на относительное движение звеньев соответственно следующие числа условий связи:

$$1 \times P_1; 2 \times P_2; 3 \times P_3; 4 \times P_4; 5 \times P_5$$

Число степеней свободы H, которым при этом будет обладать рассматриваемая КЦ равно:

$$H = 6 \times K - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1$$

В реальных механизмах кинематические цепи имеют одно звено неподвижное - станину (стойку). В этом случае общее число степеней свободы КЦ уменьшается на **шесть**.

Число степеней свободы КЦ относительно неподвижного звена - стойки называется степенью подвижности и обозначается W . Причем $W=H-6$.

$$\text{Откуда } W = 6(K-1) - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1,$$

где $(K-1)=n$ - число подвижных звеньев, тогда

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1.$$

Это формула, определяющая степень подвижности КЦ, или структурная формула кинематической цепи общего вида, впервые разработанная П.И. Сомовым в 1887 г.

Структурная формула плоской кинематической цепи

Рассмотрим плоскую кинематическую цепь из K звеньев, образующих между собой P_5 пар 5 класса и P_4 пар 4 класса. Свободные звенья этой цепи имеют 3К степеней свободы в плоскости. Кинематические пары, в которые входят звенья налагают соответствующие условия связи и при этом ликвидируются некоторые из этих степеней свободы, а всего условий связи S в рассматриваемой кинематической цепи будет:

$$S = 2P_5 + P_4.$$

При этом число степеней свободы плоской кинематической цепи определяется:

$$H = 3K - 2P_5 - P_4.$$

Поскольку у любого механизма имеется неподвижное звено - стойка и все звенья механизма движутся относительно ее, то в плоском механизме на относительные движения звеньев наложено **три** дополнительных условия связи. Поэтому будем иметь:

$$H - 3 = 3K - 2P_5 - P_4 - 3.$$

Здесь $H-3=W$ - степень подвижности цепи - указывает на число возможных движений звеньев цепи относительно стойки.

$$W = 3(K-1) - 2P_5 - P_4,$$

где $(K-1)=n$ - число подвижных звеньев, тогда:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 - \text{формула П.Л. Чебышева.}$$

На основании вышеизложенного формула П.Л. Чебышева может быть выведена и из структурной формулы кинематической цепи общего вида Сомова П.И.:

$$W = (6-3)n - (5-3)P_5 - (4-3)P_4$$

или

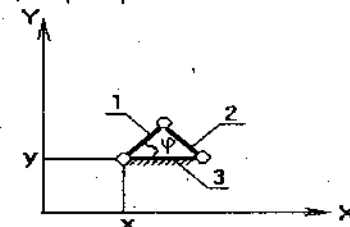
$$W = 3n - 2P_5 - P_4.$$

Проведем анализ кинематических цепей с точки зрения их степеней свободы и степеней подвижности на следующих примерах:

$$H = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 3.$$

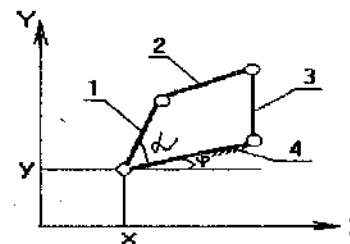
$H=3$ указывает, что представленная цепь имеет 3 возможных движения и положения звеньев в цепи описывается тремя координатами X, Y, Z :

$$W = 3 - 2 = 1.$$



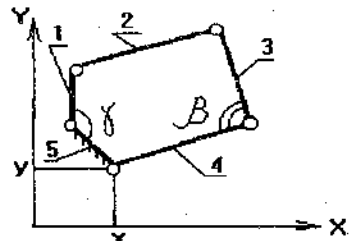
$$H = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 4.$$

В этом случае для описания положения звеньев необходимо 4 координаты. $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$ — показывает, что возможен один вариант относительного движения звеньев и для описания положения звеньев относительно стойки достаточно задать одну координату α . Положение всех звеньев зависит от положения одного звена.



$$H = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 = 5.$$

$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$ — показывает, что положение звеньев цепи относительно стойки будет определенным, если заданы положения двух звеньев этой цепи, т.е. заданием двух координат γ и β .



На основании вышеизложенного следует:

Входное звено - это то, для которого задается положение и закон движения.

Кинематическая цепь **обладает определенностью движения**, если положение всех ее звеньев является строго единственным.

Механизм - это кинематическая цепь, обладающая свойством определенности движения.

К кинематическим цепям плоских механизмов предъявляются следующие требования:

1. $W=q$ (число входных звеньев должно быть равно W)
2. КЦ должна иметь стойку (неподвижное звено)
3. КЦ должна быть замкнутой.

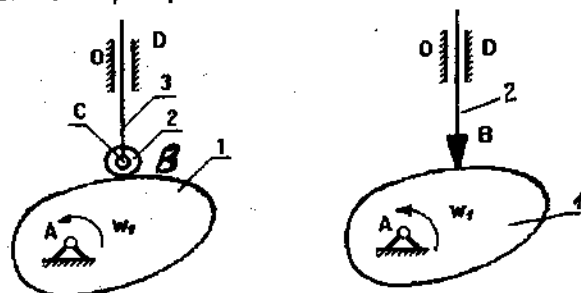
1.6. Пассивные связи и лишние степени свободы.

Сложные шарниры

В некоторых механизмах могут встретиться степени свободы и условия связи, которые не оказывают влияния на характер движения механизмов в целом.

Поэтому при структурном анализе необходимо уметь находить те звенья и кинематические пары, которые создают лишние степени свободы или избыточные связи и при определении W могут дать искаженный результат анализа, если они будут незамеченными.

Обратимся к примерам:



Механизм плоский, поэтому применяем формулу Чебышева:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4. \quad \text{Здесь } n=3; \quad P_5 = 3 (A; C; D) \quad P_4 = 1 (B)$$

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.?! \quad W > q.$$

Звено 2 (ролик) предназначено из конструктивных соображений для замены трения скольжения трением качения. С точки зрения структуры механизма и движения выходного звена (3) ролик (2) не нужен, т.е. его вращение излишне. **Такие лишние движения называют лишними степенями свободы.** Удаление из механизма ролика 2 и кинематической пары С не повлечет за собой изменение закона движения выходного звена — толкателя (3). При этом:

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1 \text{ — механизм работоспособен.}$$

Для механизма спарника-локомотива имеем:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4; \quad n=4; \quad P_5 = 6 (A; B; C; D; E; F)$$

$$P_4 = 0; \quad W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0.?! \quad W = q.$$

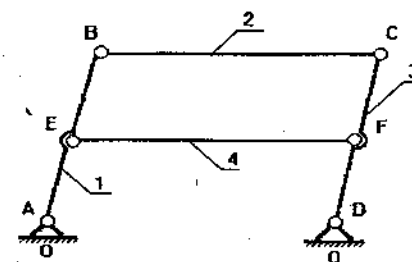
В данном случае одно из звеньев (2) или (4) является пассивным. Такие (2) или (4) звенья ставят для разделения силового потока с

целью повышения надежности работы спарника. С точки зрения структуры и кинематики одно из этих звеньев лишнее.

Удалим (4) звено:

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1, \quad W = q.$$

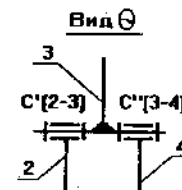
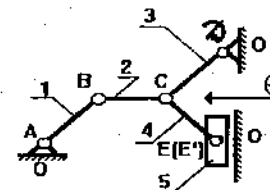
Следовательно, пассивные звенья нужно не учитывать и не изображать на схеме при структурном и кинематическом исследовании.



Сложные шарниры

Рассмотрим схему чеканочного пресса. **Простым шарниром** называют кинематическую пару 5 класса.

Сложным шарниром называют кинематическую пару, в которой сходятся более 2 звеньев, например, кинематическая пара С, (см. вид Θ).



В сложном шарнире всегда число простых шарниров на единицу меньше числа звеньев, образующих сложный шарнир.

В качестве **базового звена** принимаются, как правило, звенья, входящие в кинематическую пару со стойкой, у нас звено (3). При этом $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1$, что и требовалось доказать, т.е. $W = q$.

1.7. Замена высших кинематических пар цепями из низших.

Структурное и кинематическое условия замены.

Простая замена высшей пары на низшую недопустима, так как приводит к потере одной степени подвижности. Поэтому высшую пару необходимо заменять некоторой кинематической цепью из низших пар, соблюдая структурное и кинематическое условия замены.

Структурное условие требует, чтобы до и после замены высшей пары степень подвижности цепи не изменилась, т.е.

$$W_0 = W_{\text{зам}}.$$

Получим структурное условие замены высших кинематических пар (ВП) на кинематическую цепь с низшими кинематическими парами (НП).

Пусть в исходной кинематической цепи n_0 - число звеньев и P_{5_0} - число кинематических пар 5 класса. Допустим, что после замены в цепи будем иметь: $n' = n_0 + n_{зам}$ - звеньев и $P'_5 = P_{5_0} + P_{5_{зам}}$ - кинематических пар 5 класса. Очевидно, что замена возможна лишь в том случае, если степень подвижности исходной и заменяющей цепи не изменяется, т.е. выполняется исходное структурное условие:

$$W = W_{зам} \quad (1)$$

Применяем формулу Чебышева П.Л.:

$$W_0 = 3n_0 - 2P_{5_0} - P_{4_0} = W_{зам} = 3n' - 2P'_5, \quad (2)$$

$$3n_0 - 2P_{5_0} - P_{4_0} = 3n_0 + 3n_{зам} - 2P_{5_0} - 2P_{5_{зам}} - P_{4_0} = 3n_{зам} - 2P_{5_{зам}}. \quad (3)$$

Если кинематических пар 4 класса ($P_4 = 1$) одна, то из (3) имеем:

$$P_{5_{зам}} = \frac{3n_{зам} + 1}{2}, \quad (4)$$

Это общее структурное условие замены одной кинематической пары 4 класса.

Соотношение (4) имеет смысл, если $n_{зам}$ будет всегда нечетным, тогда $P_{5_{зам}}$ будет целым числом.

Поэтому имеем:

$n_{зам}$	1	3	5
$P_{5_{зам}}$	2	5	8

Следовательно, в пределе высшая кинематическая пара может быть заменена одним звеном с 2 кинематическими парами 5-го класса (P_5), т.е. низшими.

Кинематическое условие замены требует, чтобы законы движения звеньев, образующих высшую пару, до и после ее замены были одинаковы.

Проанализируем кинематическое условие замены.

Покажем, что рассматриваемый механизм может быть заменен эквивалентным ему механизмом шарнирного четырехзвенника AO_1O_2B .

Высшая пара 4 класса (P_4) в точке С заменяется звеном 3, входящим в точках O_1 и O_2 во вращательные пары 5 класса. Полученный в результате замены механизм AO_1O_2B называется заменяющим механизмом. Здесь $W_0 = W_{зам}$.

С позиций кинематики имеем следующее.

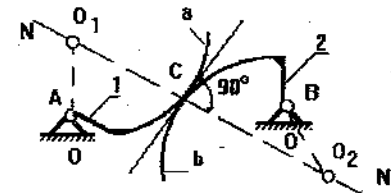
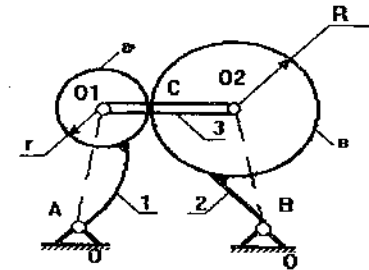
Так как элементы a и b звеньев являются окружностями с центрами в точках O_1 и O_2 , то длина O_1O_2 звена 3 оказывается постоянной. Точно так же будут постоянными и длины AO_1 и BO_2 звеньев 1 и 2.

Следовательно, заменяющий механизм AO_1O_2B эквивалентен заданному и с точки зрения законов движения звеньев 1 и 2.

Обобщим рассмотренный способ получения заменяющего механизма. Пусть задан механизм с высшей парой, элементы звеньев которой представляет собой произвольно заданные кривые a и b .

Для построения схемы заменяющего механизма необходимо:

1. Провести общую нормаль $N-N$ в точке С касания кривых.
2. Отметить на $N-N$ центры O_1 и O_2 кривизны кривых a и b .
3. Центры кривизны O_1 и O_2 считаем шарнирами, образующими вращательные пары, в которые входят условные звенья AO_1 и O_1O_2 с одной стороны и условные звенья BO_2 и O_1O_2 с другой стороны. Если центр кривизны находится в бесконечности, то вместо шарнира будем иметь поступательную пару.

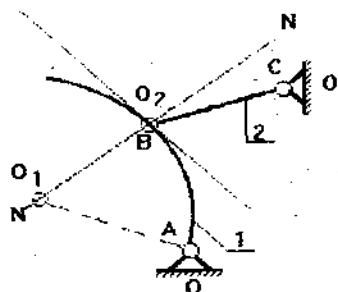


Описанная замена справедлива для заданного положения основного механизма. В другом положении схема заменяющего механизма остается той же, размеры же ее звеньев изменятся, так как центры кривизны O_1 и O_2 сместятся.

Из дифференциальной геометрии известно, что окружность кривизны в точке касания с кривой и сама кривая эквивалентны до производных второго порядка включительно, и поэтому заменяющий механизм эквивалентен основному в такой же степени, т.е. положения, скорости и ускорения одноименных точек того и другого механизма будут одинаковыми.

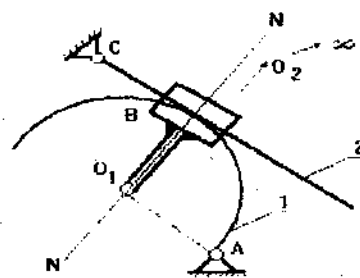
Изложенное выше позволяет сформулировать правило: для того, чтобы относительное движение звеньев не изменялось, длина заменяющего звена должна быть равной расстоянию между центрами кривизны сопряженных профилей элементов кинематической пары.

Рассмотрим примеры замены *высших пар низшими*:



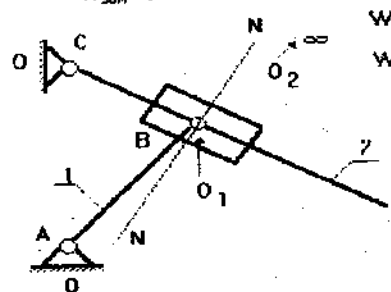
$$W_0 = 3 - 2 - 2 - 2 - 1 = 1$$

$$W_{зам} = 3 - 3 - 2 - 4 - 0 = 1$$



$$W_0 = 3 - 2 - 2 - 2 - 1 = 1$$

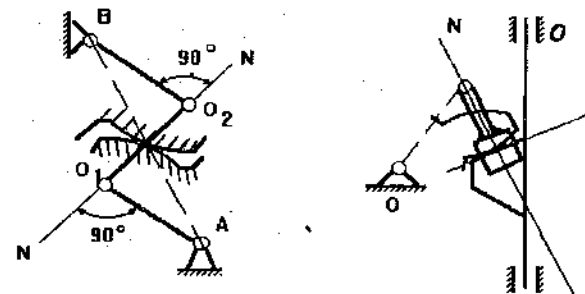
$$W_{зам} = 3 - 3 - 2 - 4 - 0 = 1$$



$$W_0 = 3 - 2 - 2 - 2 - 1 = 1$$

$$W_{зам} = 3 - 3 - 2 - 4 - 0 = 1$$

В данном случае длина заменяющего звена обратилась в нуль.



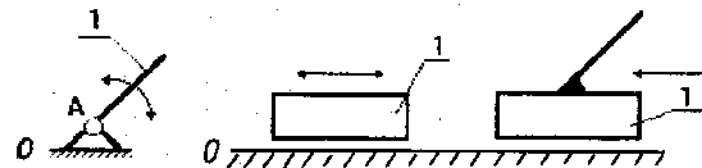
Все рассмотренные схемы пригодны для рассмотренных конкретных положений, в других положениях изменятся радиусы кривизны и длины заменяющих звеньев.

1.8. Общий принцип образования механизмов по Ассуру Л.В. Понятие механизма первого класса.

Понятие структурной группы

Основной принцип образования механизмов был впервые сформулирован в 1914 году русским ученым профессором Леонидом Владимировичем Ассуром. Суть принципа образования механизмов такова: *схема любого механизма может быть составлена последовательным присоединением к (ведущему) входному звену (входным звеньям) кинематических цепей с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, к которым они присоединяются.*

По Ассуру: соединение ведущего звена со стойкой, образующее кинематическую пару 5-го класса, называется механизмом 1-го класса.



У механизма 1-го класса степень подвижности: $W=1$. В механизме может быть одно или более ведущих (входных звеньев), каждое из которых образует механизм 1-го класса.

Структурной группой Ассура называется такая кинематическая цепь, которая обладает нулевой степенью подвижности ($W=0$) относительно тех звеньев, с которыми входят в кинематические пары свободные элементы ее звеньев (необходимое условие) и не распадается на более простые цепи, каждое из которых удовлетворяет необходимому условию, т.е. $W=0$.

Согласно определению, для структурной группы Ассура имеем:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 0.$$

Учитывая, что при структурном анализе целесообразно заменять P_4 на P_5 , будем иметь рабочую формулу, определяющую соотношение между числом звеньев n и числом кинематических пар 5 класса (P_5) в структурных группах Ассура:

$$W = 3n - 2P_5 = 0,$$

где $P_5 = \frac{3n}{2}$ — это структурное условие существования группы Ассура.

Полученному условию удовлетворяют следующие сочетания чисел звеньев и кинематических пар 5 класса:

n	2	4	6	8	...
P_5	3	6	9	12	...

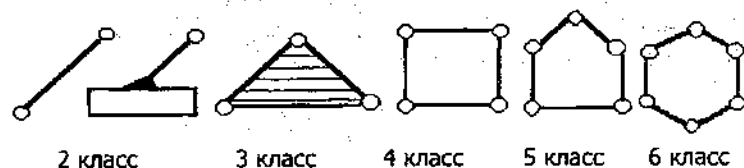
Следовательно, в структурной группе может быть различное сочетание числа звеньев и кинематических пар. Они могут отличаться друг от друга по конфигурации и по числу свободных элементов. Поэтому возникает необходимость в их классификации.

1.9. Классификация структурных групп Ассура.

Классификация механизмов

В основу классификации структурных групп Ассура И.И.Артоболовским положена классификация контуров, класс контура группы.

Класс контура равен числу кинематических пар, которые его образуют, например:



2 класс

3 класс

4 класс

5 класс

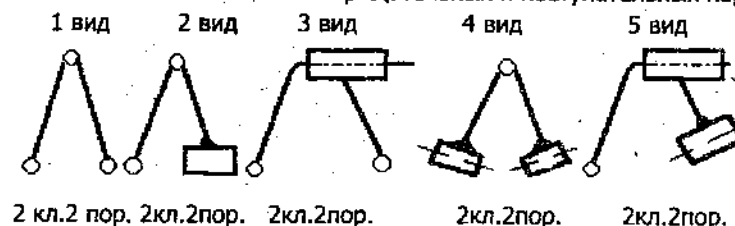
6 класс

Следует иметь в виду, что контуры не являются группами Ассура, так как для них не удовлетворяется структурное условие существования группы: $P_5 = \frac{3n}{2}$.

Класс группы Ассура равен старшему классу контура, входящему в состав рассматриваемой группы.

Порядок группы Ассура равен числу свободных элементов кинематических пар, которыми группа может быть присоединена к другим звеньям при образовании механизма.

Группы 2 класса наиболее распространены и делятся на 5 видов в зависимости от сочетания вращательных и поступательных пар.



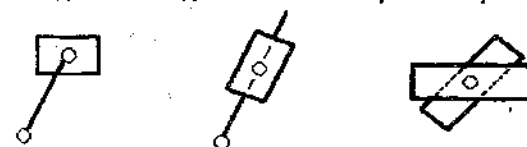
2 кл.2 пор. 2кл.2пор. 2кл.2пор.

2кл.2пор.

2кл.2пор.

Если в группе 2 класса заменить все пары на поступательные, то получается **клиновый механизм**.

Группы 2 класса называют иногда 2-поводковыми, хотя в реальных механизмах длина поводков может быть равной нулю. Тогда имеем:

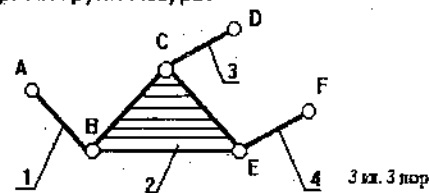


2 вид

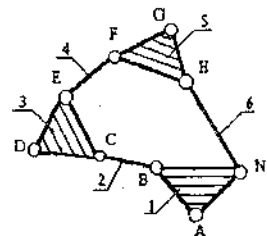
3 вид

4 вид

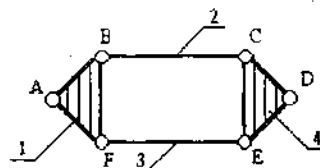
Примеры структурных групп Ассура:



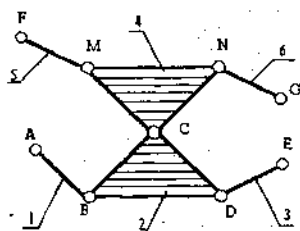
3 кл. 3 пор.



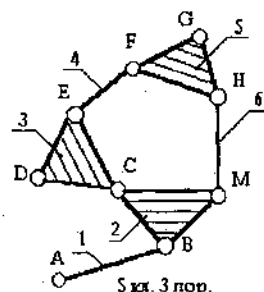
6 кл. 3 пор.



4 кл. 2 пор.

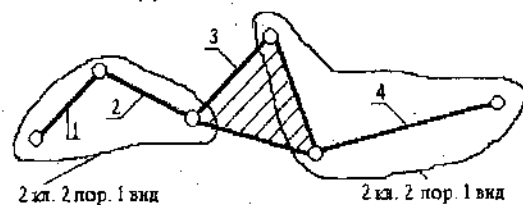


3 кл. 4 пор.



5 кл. 3 пор.

Иногда встречаются кинематические цепи, не удовлетворяющие условию существования группы.



2 кл. 2 пор. 1 вид

2 кл. 2 пор. 1 вид

$$W = 3 - 4 \cdot 2 = 0$$

Эта кинематическая цепь состоит из 2 групп 2-го класса, 2-го, 1-го вида.

В механизме может быть одно или более входных (ведущих) звеньев; каждое из них образует со стойкой механизм 1-го класса (по классификации Ассур).

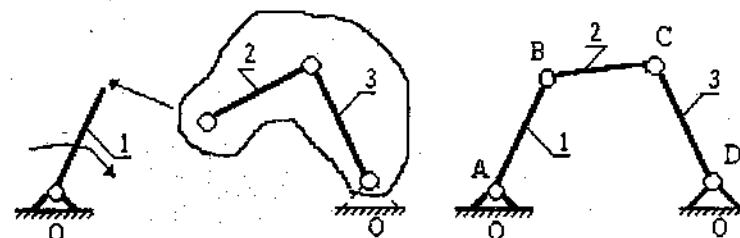
В механизме может быть несколько структурных групп разных классов.

Класс механизма определяется наивысшим классом структурной группы, входящей в него.

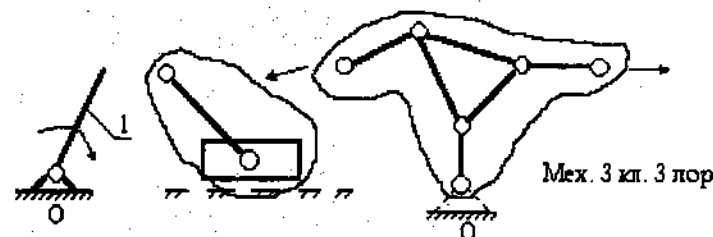
Порядок механизма определяется порядком этой группы. В зависимости от выбора входных (ведущих) звеньев **может изменяться класс механизма**.

Степень подвижности механизма равна числу механизмов 1-го класса, к которым производится присоединение групп Ассур, т.е. степень подвижности механизма равна числу входных (ведущих) звеньев рассматриваемого механизма.

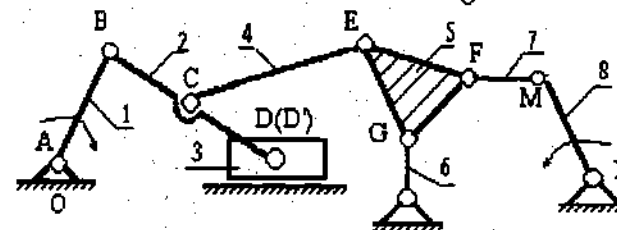
Например:



Мех. 2 кл. 2 пор.



Мех. 3 кл. 3 пор.



Класс и порядок механизма определяют метод его кинематического и динамического исследования.

1.10. Кинематическая, заменяющая и структурная схемы механизма. Формула строения механизма

Для изучения движения звеньев механизма требуется составление кинематической схемы механизма, которая является его кинематической моделью.

Кинематической схемой механизма называется изображение механизма на чертеже, выполненное с помощью условных обозначений и в масштабе с обозначением всех звеньев и кинематических пар.

Масштаб - это число μ , которое показывает, сколько единиц рассматриваемой величины K , содержится в одном миллиметре отрезка L , изображающего эту величину на чертеже.

$$\mu = \frac{K}{L}$$

Масштабы длин, скоростей и ускорений можно представить в виде

$$\mu_L = \frac{K}{L} \left[\frac{м}{мм} \right] \quad \mu_V = \frac{V}{L} \left[\frac{м/с}{мм} \right] \quad \mu_a = \frac{a}{L} \left[\frac{м/с^2}{мм} \right] \text{ и т.д.}$$

Рекомендуется выбирать на чертеже число L таким, чтобы оно было в 1; 2; 5; 10; 20; 50; 100; 1000 раз **больше** или **меньше** числа K . Соответственно будем иметь масштаб увеличения или уменьшения.

Кинематическая схема, на которой показана замена высших кинематических пар на низшие, называется **заменяющей схемой**.

Кинематическая и заменяющая схемы не позволяют еще выделить структурные группы и определить класс механизма. Поэтому строится вспомогательная структурная схема, которая позволяет решить эти вопросы.

Структурная схема механизма - это условное изображение того, как звенья механизма соединяются между собой, во сколько кинематических пар входит то или иное звено.

При построении структурной схемы нет необходимости вычерчивать длины звеньев в масштабе. Важно показать, что звено, входящее более чем в две кинематические пары, изображается соответствующим многоугольником.

Требования к построению структурной схемы

1. Строится не в масштабе.
2. Пассивные звенья отбрасываются.

3. Сложные шарниры расчленяются на простые с определением базового звена.

4. Высшие кинематические пары заменяются низшими с соблюдением лишь структурного условия.

5. Звенья, входящие более чем в две пары заменяются соответствующим жестким многоугольником.

6. Поступательные пары можно заменить вращательными.

7. Правильность построения структурной схемы определяется совпадением W для кинематической и структурной схемы.

Каждой кинематической схеме соответствует лишь одна структурная. В то же время множеству различных кинематических схем может соответствовать одна структурная. Кинематическая схема по структурной не восстанавливается.

Формула строения механизма - это условная запись последовательности присоединения структурных групп к механизму (мам) 1-го класса.

Например:

Мех. 2 кл. 2 пор. = Мех. 1 кл. \rightarrow Гр.2 кл.2п 1 в (2-3)

Мех. 3 кл. 3 пор. = Мех. 1 кл. \rightarrow Гр.2 кл.2п 2в (2-3)

Мех. 1 кл. \rightarrow Гр.3 кл.3п (4-5-6-7).

Эта формула позволяет установить как метод исследования кинематики и динамики механизма, так и последовательности этих операций по элементам структуры.

1.11 Методика структурного анализа и синтеза плоских механизмов

Последовательность операций

1. Номеруются звенья и обозначаются буквами русского алфавита кинематические пары в порядке передачи движения.
2. Проводится классификация звеньев по характеру движения.
3. Проводится классификация кинематических пар.
4. Определяются звенья с лишними степенями свободы и пассивные звенья.
5. В сложных шарнирах определяются базовые звенья.
6. Определяется степень подвижности механизма и сопоставляется с числом входных звеньев. Делается при этом вывод о том, является ли заданная схема механизмом.

7. Высшие кинематические пары заменяются кинематическими цепями с низшими парами на исходной кинематической схеме. (Получается заменяющая схема механизма).

8. Строится структурная схема механизма с учетом требований к ней.

9. Выделяются структурные группы Ассура по правилу:

- выделение группы проще всего начинать со звеньев, наиболее удаленных от входного;

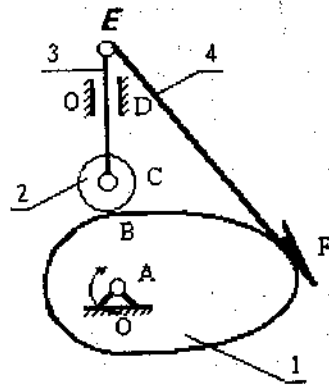
- в начале пытаются выделить группы 2 класса, если невозможно, то группы 3 класса и т.д.;

- выделение групп проведено правильно, если оставшаяся кинематическая цепь замкнута.

10. Определяется класс механизма и его порядок; записывается его формула строения.

1.12 Примеры структурного анализа плоских механизмов

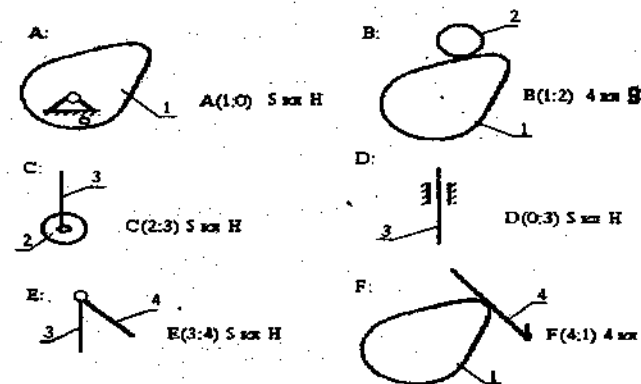
Данными для структурного исследования является схема механизма с указанием входных звеньев.



Требуется определить класс, порядок механизма и записать формулу его строения.

Обозначаем и нумеруем звенья механизма (начиная с входного), классифицируем их: 1 - кулачок; 2 - ролик; 3 - толкатель; 4 - толкатель шатун; 0 - стойка.

Обозначаем, выделяем (можно не выделять, а рассматривать прямо на схеме) и классифицируем кинематические пары.



Определяем степень подвижности механизма $W: W=3-4-2-4-2=2$.

Полученный результат указывает на наличие пассивного звена; очевидно, пассивным является звено 2 (ролик). Освободимся от него, в результате схема принимает следующий вид.

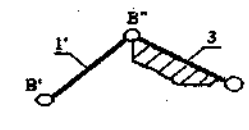
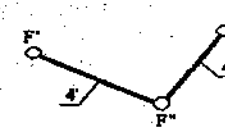
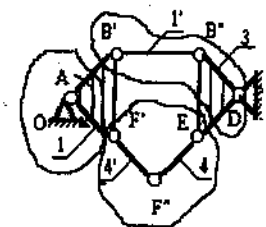
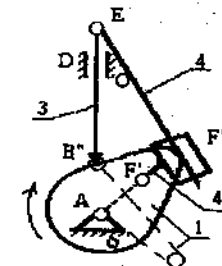
Определяем $W = 3-3-2-3-2 = 1$. Делаем вывод о том, что используемая схема является механизмом.

В соответствии с правилами замены высших пар (B и F) проведем их замену на низшие B' ; B'' ; F' ; F'' и два дополнительных звена $B'B''$ и $F'F''$. В результате получаем заменяющую схему механизма.

Для проверки определяем $W_{зам} = 3-5-2-7=1$.

Далее строим структурную схему механизма с учетом требований к ней.

Осуществляем проверку: $W=3-5-2-7=1$. На структурной схеме выделяем механизм 1-го класса, а затем структурные группы и проводим их классификацию.



гр. 2 кл. 2 пор.

гр. 2 кл. 2 пор.

По наивысшему классу и соответствующему порядку групп Ассура, входящих в схему механизма, устанавливаем, что исследуемый механизм 2-го класса и второго порядка.

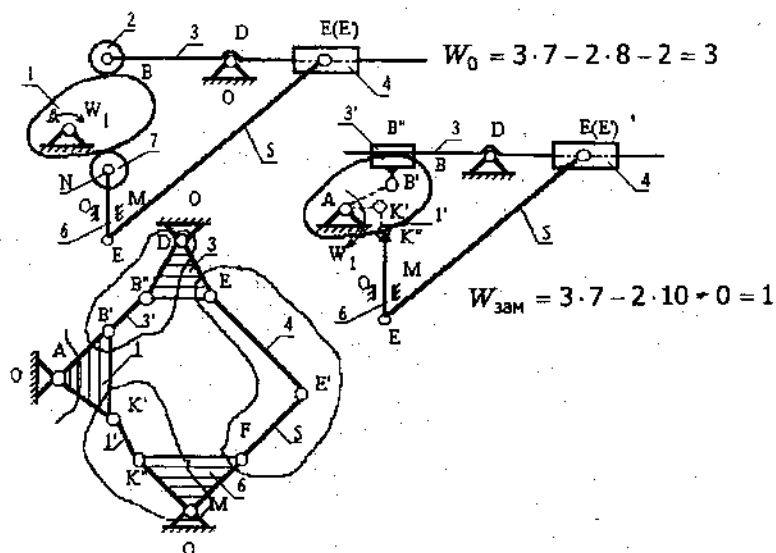
Записываем формулу строения механизма:

$$\rightarrow \text{Гр.2кл.2пор.}(3';3) \rightarrow$$

$$\text{Мех.2 кл.} = \text{Мех 1кл.}(1.0) \rightarrow \text{Гр.2кл.2пор.}(4';4)$$

Полученная формула позволяет установить, как метод исследования кинематики или динамики механизма, так и последовательность этих исследований по элементам структуры.

Аналогично рассуждая и проводя соответствующие этапы структурного исследования, определим класс, порядок и формулу строения для следующей кинематической схемы:



Запишем формулу строения рассмотренного механизма:

$$\text{Гр.2кл.2пор.}(3'-3)$$

$$\text{Мех.2 кл.} = \text{Мех 1кл.} + \text{Гр.2кл.2пор.}(4-5)$$

$$\text{Гр.2кл.2пор.}(1'-6)$$

Существует тесная связь структурного анализа и синтеза с другими разделами курса ТММ, в частности с кинематикой и динамикой.

С кинематикой:

1. Установленный класс механизма позволяет выбрать соответствующий метод кинематического исследования.

2. Формула строения механизма устанавливает строгую последовательность кинематического исследования мех. 2 кл.: начинать с механизма 1-го класса, потом 1-я присоединенная группа и т.д.

3. В случае механизма 2-го класса определяются кинематические пары, для которых составляются уравнения движения (т.е. средние кинематические пары групп 2 кл.).

С динамикой:

1. Последовательность силового расчета механизма обратна формуле его строения.

2. Степень подвижности механизма W определяет число дифференциальных уравнений, которые надо проинтегрировать для определения законов движения механизма.

В заключении необходимо отметить, что существующая теория применима для механизмов основных рабочих машин. При этом есть ряд механизмов, для которых эта теория неприменима:

1) во многих механизмах в кинематических парах имеют место ограничения не только на относительные перемещения, но и на относительные скорости. В этом случае получается неголономные связи, требующие специальных методов интегрирования;

2) не завершена исчерпывающая классификация пространственных кинематических цепей;

3) не завершена в общем виде теория незамкнутых пространственных цепей, лежащих в основе промышленных роботов и манипуляторов.

1.13. Структурный синтез механизмов высших классов

Современные роботизированные системы в своих устройствах содержат множество рычажных механизмов, которые являются передаточными устройствами при взаимодействии их с объектами производственной среды. Рычажные механизмы второго и третьего классов, полу-

чившие широкое применение в инженерной практике, уже не могут отвечать требованиям при проектировании современных машин. Поэтому возникла необходимость в применении схем механизмов со структурными группами Ассура высоких классов, которые обладают более широкими кинематическими возможностями.

Мы познакомимся с некоторыми элементами методики структурно-метрического синтеза, изложенной в работе Муратова Абила "Синтез многофункциональных механизмов высоких классов", которая позволяет установить закономерность структурообразования схем механизмов с одной степенью свободы из структурных групп Ассура путем их расчленения на коромысловые и шатунные подгруппы и развитие этих подгрупп по числу степеней подвижности и по числу звеньев, выделить по общим структурным признакам несколько обобщенных структурных видов механизмов.

На основании структурно-кинематической теории синтеза плоских рычажных механизмов высоких классов установлено четыре особых свойства схем механизмов высоких классов. Эти свойства значительно расширяют функциональные возможности рычажных систем.

Первое свойство позволяет воспроизводить траектории различной формы и длиной, в несколько раз превышающей длины отдельных звеньев схемы и длины хода входного звена. На практике такие механизмы позволяют создавать складывающиеся до заданного габарита грузоподъемные устройства и протезы верхней и нижней конечностей человека, работающие от культи.

Второе свойство позволяет одновременно воспроизводить сложную передаточную функцию перемещения и траекторию исполнительной точки механизма (эффект изменяемого замкнутого контура).

На практике использование второго свойства позволяет создать передаточно-направляющие механизмы, которые при воспроизведении заданной траектории одновременно могут обеспечить заданную передаточную функцию между входным и выходным звеньями. Это свойство схемы использовано при создании механизма ноги шагающего транспортного устройства.

Третье - адаптивное свойство схемы. При этом наличие нескольких передаточных звеньев и изменяемых замкнутых контуров группы Ассура в схемах механизмов высоких классов позволяет в процессе синтеза предусмотреть адаптивные связи в схемах, которые накладываются при определенных взаимодействиях звеньев с внеш-

ними объектами и тем самым изменяют структуру схемы, а в результате - механизм переходит от одного режима в другой режим работы, адаптируясь к условиям внешней среды.

На практике это свойство схемы реализовано при создании протезов голени и кисти рук человека, механизма ноги шагающего устройства, а также при проектировании конструкции универсального захватного устройства малогабаритных электропогрузчиков для переработки тарно-штучных грузов.

Четвертое - свойство циркуляции (возмущения). Наличие многошарнирного шатуна, соединенного с входным звеном и изменяемых замкнутых контуров в схемах механизмов высших классов с одной степенью подвижности, приводит к разветвлению движущего возмущения входного звена по сторонам многошарнирного шатуна (при наличии условного сопротивления выходного звена) и к взаимодействию звеньев замкнутого контура.

В зависимости от характера разветвления и от размеров звеньев и структуры схемы выходные звенья перемещаются по различным законам, которые также можно использовать для реализации специальных условий синтеза.

Это свойство использовано для создания схемы механизма, преобразующего качательное движение входного звена в круговое вращательное движение выходного звена без применения дополнительных возмущений (веса, сил инерции и т.д.), т.е. для создания схемы механизма без "мертвых" положений.

Рассмотрим закономерности развития структурных подгрупп и принцип образования схем механизмов с одной степенью свободы из ассуровских групп. Чтобы выявить особенности структурообразования схем механизмов из различных структурных групп Ассура, будем разчленять их на две подгруппы: коромысловую подгруппу и шатунную подгруппу. При этом коромысловая подгруппа выделяется как цепь с положительной степенью свободы, а шатунная подгруппа -

Таблица
Структурная карта

КОМПОНЕНТЫ ПОДСТРОИ	МЕХАНИЗМЫ ОДНОКОНТУРНЫЕ						МЕХАНИЗМЫ ДВОУХКОНТУРНЫЕ					
	И1	И2	И3	И4	И5	И6	И1	И2	И3	И4	И5	И6
И1												
И2												
И3												
И4												
И5												
И6												

Окончание табл.

И5		И5И20 И5И21 пере- ход И5И15 И5И22 *										3-х контурная схема
И6		И6И30 И6И31 бескон- турные схемы	И6И32 И6И22	И6И23 И6И24	И6И33 И6И34	И6И25						3-х контур- ная схема
И7		И7И10 И7И31 бескон- турные схемы *	И7И32 *									
И8		И8И10 И8И41 бескон- турные схемы	И8И25 И8И43	И8И26 И8И27								
И9		И9И51 И9И25										

как цепь с отрицательной степенью свободы (см. таблицу). По верхним строкам этой структурной таблицы развивается коромысловая подгруппа (К) по числу степеней свободы, а по первому столбцу, аналогично шатунная подгруппа (Ш).

Независимо развивая эти подгруппы по числу степеней свободы и по количеству звеньев и рассматривая любое взаимное сочетание при их соединении между собой, мы получим различные структурные группы, после присоединения которых к входному звену, образуются соответствующие схемы механизмов. Например, к коромысловой подгруппе (см. таблицу) К 1 с одной положительной степенью подвижности присоединив шатунную подгруппу Ш 1 с одной отрицательной степенью подвижности, получим схему структурной группы Ассура, а присоединив ее к входному звену (пунктирная линия), получим схему механизма Ш1К1. Аналогично образованы все схемы, представленные в рассматриваемой таблице. В случае, когда соединяются между собой коромысловая и шатунная подгруппа с различными числами степеней свободы получают неассуровские структурные группы с лишней степенью свободы, или с избыточной связью, и соответственно при их соединении к входному звену образуются схемы механизмов не с одной степенью свободы. В таблице же представлены только механизмы с одной степенью свободы.

2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

2.1. Цели, задачи и методы кинематического анализа механизмов

Целью кинематического анализа механизмов является изучение законов движения их звеньев без учета сил, вызывающих эти движения. Указанная цель достигается путем решения следующих задач:

1. Определение перемещений звеньев и траекторий, описываемых точками звеньев (это необходимо для определения габаритов механизма и согласования движения его различных звеньев - задача о положениях).

2. Определение линейных скоростей точек звеньев и угловых скоростей этих звеньев (знание скоростей необходимо для оценки качества технологических операций, выполняемых машиной, расчета ее производительности, потребности в инструменте и т.д.) - задача о скоростях.

3. Определение линейных ускорений точек звеньев механизма и угловых ускорений этих звеньев (необходимо для динамических расчетов, а также для машин, в которых качество технологического процесса зависит от ускорения, например, вибропитатели, виброконвейеры и т.п.) — задача об ускорениях.

Перечисленные задачи решаются следующими методами:

1. Графическими (они просты, наглядны, информативны, но не очень точны). Графический метод не требует составления и решения уравнений.

При выполнении графических построений возникает необходимость в виде отрезков изображать те или иные величины (длина звеньев, перемещения, скорости, ускорения и т.д.), а значит, необходимы масштабы, в которых эти величины изображаются на чертеже. Предположим, что величина К изображена на чертеже отрезком l, тогда

масштаб или, точнее, цена деления этой величины будет: $\mu = \frac{k}{l}$.

Следовательно, масштабом называется число μ , которое показывает, сколько единиц рассматриваемой величины К содержится в одном миллиметре отрезка l, изображающего эту величину на чертеже.

Длины звеньев, скорости, ускорения принято обозначать соответственно в м; м/с; м/с², а отрезки их изображающие на чертеже в мм.

Тогда будем иметь $\mu_l \left[\frac{\text{м}}{\text{мм}} \right]$ - масштаб длин; $\mu_v \left[\frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}} \right]$ - масштаб скоро-

стей; $\mu_a \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}} \right]$ - масштаб ускорений и т.д.

Для масштабов целесообразно выбирать следующие числа: 5000; 500; 50; 5; 0.5; 0.05; 0.005; 2000; 200; 20; 2; 0.2; 0.02; 0.002; 1000; 100; 10; 0.1; 0.01; 0.001.

2. Аналитическими методами (они очень точны и информативны, но весьма трудоемки при анализе сложных механизмов). Аналитический метод связан с записью и решением уравнений с помощью ЭВМ. Обычно задача решается с помощью аналогов скоростей и ускорений, которые характеризуют собственные свойства механизма в преобразовании им движения.

Рассмотрим аналоги скоростей и ускорений, а также выражение скоростей и ускорений через их аналоги. *см. стр. 38-40 рис. 1*

Пусть угол поворота φ_i звена (i) найден в виде функции $\varphi = \varphi(t)$. Тогда угловая скорость ω_i и угловое ускорение ε_i звена (i) могут быть найдены дифференцированием функции φ по времени (t). После первого дифференцирования будем иметь:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{d\varphi_1} \omega_1 \quad (2.1)$$

где $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$ - угловая скорость входного (ведущего) звена, имею-

щая размерность $\left[\frac{1}{\text{с}} \right]$; $\frac{d\varphi_i}{d\varphi_1}$ - аналог угловой скорости звена (i);

это безразмерная величина.

Аналогом угловой скорости звена называется 1-я производная от угла поворота этого звена по обобщенной координате механизма.

Дифференцируя уравнение (2.1) по времени (t), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi_i}{d\varphi_1} \omega_1 \right) = \omega_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi_i}{d\varphi_1} \right) + \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1} \frac{d\omega_1}{dt} = \\ &= \omega_1 \frac{d}{d\varphi_1} \left(\frac{d\varphi_i}{d\varphi_1} \right) \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1} \varepsilon_1 = \omega_1 \frac{d^2\varphi_i}{d\varphi_1^2} \omega_1 + \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1} \varepsilon_1 = \\ &= \frac{d^2\varphi_i}{d\varphi_1^2} \omega_1^2 + \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1} \varepsilon_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}$ - угловое ускорение входного (ведущего) звена, имеющее

размерность $\left[\frac{1}{\text{с}^2} \right]$; $\frac{d^2\varphi_i}{d\varphi_1^2}$ - аналог углового ускорения звена (i)

(безразмерная величина).

Аналогом углового ускорения звена называется 2-я производная угла поворота звена по обобщенной координате механизма.

Пусть r_k есть радиус-вектор, определяющий положение точки К звена (i) механизма.

Тогда скорость V_k и ускорение a_k точки К могут быть найдены дифференцированием радиус-вектора r_k по времени t.

$$V_k = \frac{dr_k}{dt} = \frac{dr_k}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{dr_k}{d\varphi_1} \omega_1, \quad (2.3)$$

где $\frac{dr_k}{d\varphi_1}$ - аналог скорости точки К, имеющий размерность длины.

Аналогом линейной скорости точки называется первая производная радиус-вектора этой точки по обобщенной координате механизма.

Дифференцируя уравнение (2.3) по времени t, получим:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{dV_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr_k}{d\varphi_1} \omega_1 \right) = \omega_1 \frac{d}{d\varphi_1} \left(\frac{dr_k}{d\varphi_1} \right) \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{dr_k}{d\varphi_1} \frac{d\omega_1}{dt} = \\ &= \omega_1^2 \frac{d^2r_k}{d\varphi_1^2} + \varepsilon_1 \frac{dr_k}{d\varphi_1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\frac{d^2r_k}{d\varphi_1^2}$ - аналог линейного ускорения точки, имеющий размерность длины.

Аналогом линейного ускорения точки называется 2-я производная радиус-вектора этой точки по обобщенной координате механизма.

Таким образом, скорости и ускорения звеньев и их точек могут быть найдены через соответствующие аналоги скоростей и ускорений и угловые скорость и ускорение входного (ведущего) звена механизма. Если входное звено совершает поступательное движение, то обобщенной координатой является его перемещение. В данном случае определение аналогов скоростей и ускорений может быть выполнено аналогично. Аналоги скоростей и ускорений звеньев и точек механизма зависят только от обобщенной координаты механизма и не зависят от закона движения входного (ведущего) звена, т.е. они являются характеристиками самого механизма.

С введением в рассмотрение аналогов скоростей и ускорений кинематическое исследование механизма можно вести чисто геометрическим путем. Наличие же закона движения входного (ведущего) звена позволит вычислить конкретные значения скоростей и ускорений звеньев и точек механизма.

При этом движение входного звена механизма с угловой скоростью $\omega_1 = \text{const}$ и $\varepsilon_1 = 0$, носит название перманентного или основного движения механизма. Если в равенствах (2.2) и (2.4) принять угловую скорость $\omega_1 = 0$, то эти равенства принимают вид:

$$\varepsilon_i = \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1} \varepsilon_1, \quad (2.5)$$

$$a_k = \frac{dr_i}{d\varphi_1} \varepsilon_1. \quad (2.6)$$

Движение ведущего звена, описываемое равенствами (2.5) и (2.6), носит название начального движения. В начальном движении механизма ω_1 ведущего звена равна нулю, поэтому его нормальные, относительные и кориолисовы ускорения также равны нулю. Следовательно, в начальном движении звеньев и точки механизма имеют только угловые и тангенциальные ускорения, линии действия которых совпадают с линиями действия скоростей соответствующих точек звеньев. Истинное движение каждого механизма в общем случае можно рассматривать состоящим из перманентного и начального движений.

3. Графоаналитическими методами (они сочетают достоинства методов графических и аналитических, а их недостатки в некоторой степени сглаживают).

2.2. Планы положений механизма.

Определение траекторий точек звеньев механизмов

В графическом и графоаналитическом методах эта задача решается одинаково. Наиболее простым и распространенным методом для определения траекторий точек является метод геометрических точек. Он основан на построении планов положений механизма. Для решения задачи о положениях звеньев механизма должны быть заданы кинематическая схема механизма и закон движения ведущего звена для механизма с $W=1$ или законы движения ведущих звеньев для механизмов с $W>1$.

Планы положений механизма служат основой для графических и графоаналитических методов кинематического анализа. Поэтому для определения положений звеньев механизма строят его кинематическую схему в соответствующем масштабе. Движение ведущего звена при кинематическом исследовании всегда будем предполагать равномерным, т.е. $\omega_1 = \text{const}$. Крайними называют такие положения механизма, в которых выходные звенья занимают наиболее удаленные

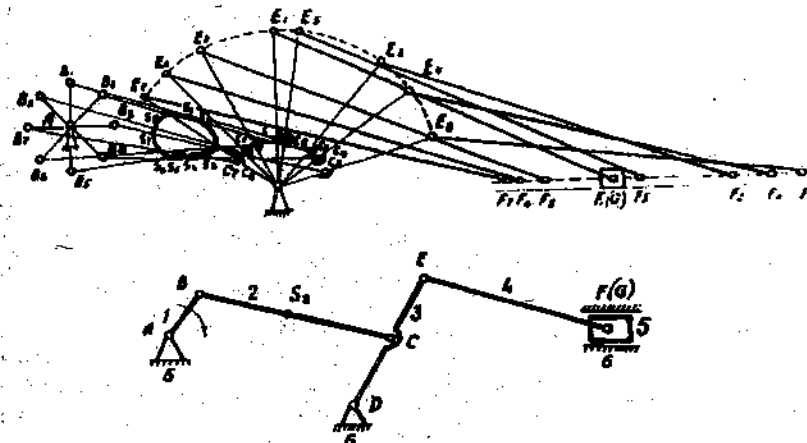


Рис. 2.1. Кривошипно-рычажный пресс

друг от друга положения. За начальное или нулевое положение, при построении планов положений механизма принимают, как правило, одно из крайних положений. Рассмотрим построение планов положений механизма на конкретном примере: кинематической схеме кривошипно-рычажного пресса (рис.2.1). Механизм преобразует равномерное вращательное движение ведущего звена - кривошипа 1 в возвратно-поступательное движение ползуна 5.

При построении планов положений механизма поступаем так. В заданном масштабе μ , строим схему механизма при каком-то определенном, например: вертикальном положении ведущего звена 1, (см. рис.2.1). За один оборот кривошипа точка В опишет траекторию: окружность. Разбив эту окружность на несколько равных частей, например на 8, можно показать положения кривошипа через каждую 1/8 часть его полного оборота, а затем положения всех остальных звеньев механизма. Выполняя эту работу, следует исходить из того, что длины звеньев известны, а также заранее можно сказать, по каким траекториям движутся некоторые точки механизма. Мы уже отметили, что траекторией точки В за один оборот кривошипа является окружность радиуса АВ; коромысло 3 при работе механизма совершает качательное движение, значит, точка С движется по дуге окружности радиуса СД, кроме того, расстояние между точкой С и точкой В нам также известно, оно представляет собой длину шатуна ВС на чертеже.

Засечкой с помощью циркуля, можно найти в заданном положении механизма точку С, а следовательно, положение коромысла 3 и точку Е. Ищем теперь положение шатуна 4 и ползуна 5. При работе механизма ползун 5 движется возвратно-поступательно и его траекторией является горизонтальная прямая. Берем раствор циркуля, равный длине шатуна 4 на нашем чертеже, ставим ножку циркуля в точку Е и делаем засечку на этой прямой. Таким образом получаем точку F. Проведя прямую EF, показываем положение шатуна 4 и ползуна 5.

Построив планы положений механизма, легко найти траекторию любой интересующей нас точки. Чтобы показать, например, траекторию точки S_2 - центра тяжести шатуна 2, изображаем положения этой точки в ряде последовательных положений механизма, и плавной линией соединяем их между собой. На рис.2.1. эта траектория имеет вид замкнутой кривой. Аналогично находятся траектории любых других точек механизма.

Обычно планы положений механизма начинают строить с определения крайних положений ведомого звена и выбора их нулевого положения. За нулевое положение выбирают то из крайних положений, которое соответствует моменту, с которого выходное-исполнительное звено начинает встречать полезное сопротивление при выполнении своих функций, т.е. точку B_0 . Например, для кривошипно-ползунного механизма (см. рис.2.2.) порядок построения планов положений может быть следующим:

1. Наносим на чертеже неподвижные оси механизма (точка А).
2. Радиусом, равным длине кривошипа АВ, проводим окружность, являющуюся траекторией движения точки В. На ней наносим точки B_0 и B_0' , соответствующие крайним положениям механизма и выбираем из них нулевое, т.е. B_0 . Далее наносим на окружности положения точки В: B_1, B_2, \dots, B_n . Таких положений может быть 8, 12, реже 24 или 36. Углы между соседними положениями кривошипа определяются по выражению:

$$\Delta\varphi = \frac{360^\circ}{n}$$

где n - число выбранных положений механизма (кривошипа).

3. Из полученных точек B_1, B_2, \dots, B_n радиусом, равным длине шатуна ВС, делаем засечки на линии X-X и получаем соответствующие положения точки С и всего механизма в целом.

Таким образом, в общем случае, построение планов положений механизмов второго класса сводится к последовательному определению положений звеньев 2-поводковых групп, у которых неизвестными являются положения крайних элементов кинематических пар, выполненных в масштабе кинематической схемы механизма.

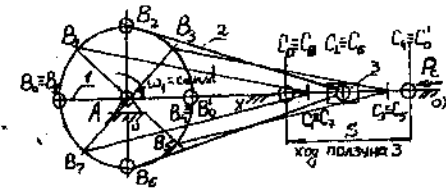


Рис. 2.2. Планы положений кривошипно-ползунного механизма

2.3. Решение задачи о скоростях и ускорениях графическим методом (графическое дифференцирование)

Покажем применение графического метода к исследованию конкретного механизма, показанного на рис.2.2. Пусть требуется построить диаграммы $S_c=S_c(t)$, $V_c=V_c(t)$, $a_c=a_c(t)$ или $S_c=S_c(\varphi_2)$, $V_c=V_c(\varphi_1)$ и $a_c=a_c(\varphi_2)$ для точки С ползуна 3 в перманентном движении механизма, если кривошип вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = \text{const}$. Находим перемещение точки С относительно крайнего левого положения, принятого нами за нулевое, т.е. точки C_0 за полный оборот кривошипа 1. Для этого воспользуемся планом положений рассматриваемого механизма (см рис 2.2.)

Строим оси координат $S_c - t$ (рис.2.3,а), и на оси абсцисс откладываем отрезок $l = 08$ в мм, изображающий время одного полного оборота кривошипа в масштабе μ_t .

$$\text{Тогда} \quad T = \frac{60}{n_1} = \mu_t l, \quad (2.7.)$$

где T - время одного оборота кривошипа, сек; μ_t - масштаб времени.

$$\mu_t = \frac{60}{n_1 l}, \text{ с/мм.} \quad (2.8.)$$

Отрезок l делим на 8 равных частей (на практике часто берут 12, 24 или 32 деления) и в соответствующих точках 1, 2, 3... по оси ординат откладываем расстояния C_0C_1, C_0C_2, \dots , пройденные точкой С от ее крайнего левого положения C_0 . До крайнего правого положения C_4 расстояния возрастают, а начиная двигаться от C_4 влево, они будут уменьшаться. Когда кривошип придет в начальное положение B_0 , ордината диаграммы (S_c-t) будет равна нулю. Полученные точки 0, 1', 2', 3', ... соединяем последовательно плавной кривой, которая и является диаграммой расстояний точки С (см. рис.2.3,а).

Если величины расстояния C_0C_1, C_0C_2, \dots откладывать прямо со схемы (см.рис.2.2), то масштаб μ_s диаграммы ($S_c - t$) будет равен μ_1 ; если же эти расстояния приходится уменьшить в m раз, то μ_s соответственно увеличивают в m раз, т.е.

$$\mu_s = m \mu_1,$$

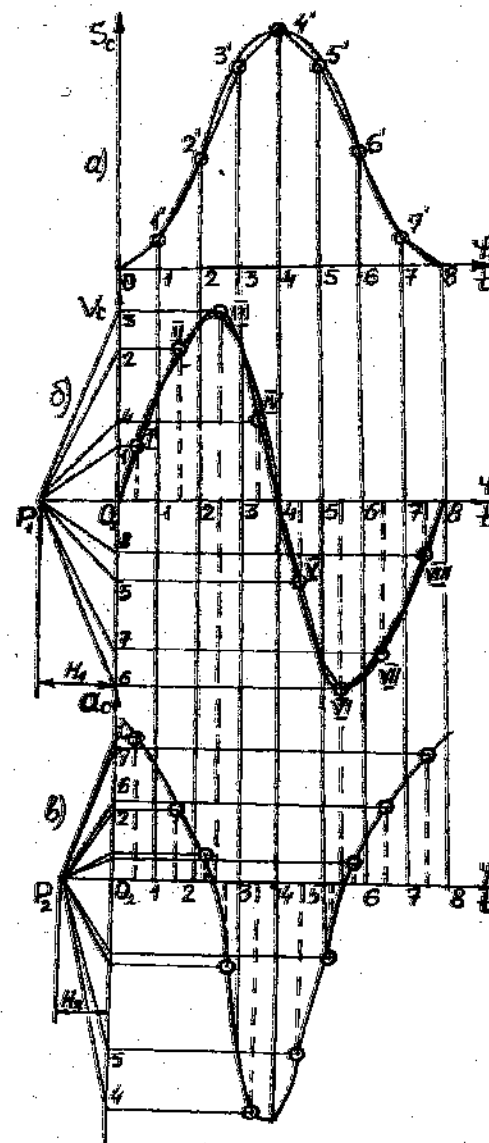


Рис. 2.3. Диаграммы движения ползуна

При равномерном вращении кривошипа можно считать, что по оси абсцисс отложено не время t , а путь S_B точки В и масштаб по оси

$$\mu_l = \frac{2\pi l_{AB}}{l} \left[\frac{M}{MM} \right], \text{ где значение } l \text{ должно быть взято с чертежа в мм.}$$

Если по оси абсцисс откладывать углы поворота кривошипа φ , отсчитывая их по ходу часовой стрелки от начального положения AB_0 , то данная диаграмма представит функциональную зависимость $Sc=Sc(\varphi)$ и масштаб по оси абсцисс

$$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{l} \quad 1/\text{мм} / . \quad (2.9.)$$

Для построения диаграммы скорости ($V_c - t$) поступают так:

- под диаграммой ($Sc-t$) строят оси координат - O_1V_c , O_1t , (см.2.3,б) и на продолжении оси O_1t влево откладывают отрезок $O_1P_1=N_1(\text{мм.})$

- из точки P_1 проводят лучи $P_{11}, P_{12}, P_{13}, \dots$, параллельно хордам кривой ($Sc-t$) на участках $O_1'1', 1'2', 2'3', \dots$. Эти лучи отсекут на оси O_1V_c отрезки $O_{11}, O_{12}, O_{13}, \dots$, пропорциональные средней скорости V_c на соответствующем участке диаграммы.

- откладывают эти отрезки на средних ординатах соответствующих участков.

Далее, соединяют ряд полученных точек I, II, III, ..., плавной кривой, которая и будет диаграммой скорости ($V_c - t$).

Следует иметь в виду, что участки, на которых кривая имеет экстремум (как, например, участок (2-3) и (5-6) на рис. 2.3, б, следует разделить дополнительно на два участка каждый, на протяжении которых кривая (V_c-t) не имеет экстремума.

Имея диаграмму (V_c-t), аналогично строится диаграмма ускорений (a_c-t), которая представлена на рис.2.3,в. Масштаб μ_t диаграмм (V_c-t) и (a_c-t) остается таким же, как и раньше, а масштабы по осям ординат определяются по следующим формулам:

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t \cdot H_1}, \quad \text{м.с}^{-1}/\text{мм}, \quad (2.10.)$$

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t \cdot H_2}, \quad \text{м.с}^{-2}/\text{мм} \quad (2.11.)$$

где H_1 и H_2 - отрезки, взятые с чертежа, мм.

Если по оси абсцисс отложено не время t , а угол поворота кривошипа $\varphi = \omega_1 t$, то будем иметь: $\mu_t = \frac{\mu_\varphi}{\omega_1}$; а выражения для μ_v и μ_a принимают вид:

$$\mu_{v_c} = \frac{\mu_s \omega_1}{\mu_\varphi H_1}, \quad \text{м.с}^{-1}/\text{мм}, \quad (2.12)$$

$$\mu_{a_c} = \frac{\mu_s \omega_1^2}{\mu_\varphi H_1 H_2}, \quad \text{м.с}^{-2}/\text{мм}, \quad (2.13)$$

$$\text{где } \omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}, \quad 1/\text{с.}$$

Из рассмотрения зависимостей (2.10) и (2.11) видно, что величины масштабов дифференциальных кривых зависят от соответствующего полюсного расстояния H_1 или H_2 , которое выбирается так, чтобы дифференциальная кривая вместились на отведенном для нее месте чертежа. При этом следует иметь в виду, что метод графического дифференцирования не является достаточно точным, а поэтому его применяют для приближенного определения скоростей и ускорений.

В качестве проверки правильности построения можно пользоваться очевидными условиями: скорость V_c должна быть равна нулю, см.рис.2.3,б, положение 4, когда перемещение Sc имеет максимальное значение(см.рис.2.3,а). Аналогично ускорение a_c будет равно нулю в положении, когда скорость V_c имеет максимальное значение и т.д.

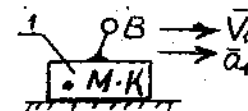
2.4.Решение задачи о скоростях и ускорениях графоаналитическими методами

2.4.1 Планы скоростей и ускорений звеньев при заданном законе их движения

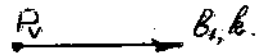
Звено совершает поступательное движение (ползун)

Дано: V_1, a_1, μ_1 .

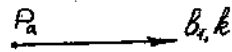
Требуется построить план скоростей и ускорений для звена 1.



Выбираем масштаб скоростей μ_v [м/с·мм] и строим план скоростей.



Выбираем масштаб ускорений μ_a [м/с²·мм] и строим план ускорений.



Если $V_1 = \text{const}$, тогда точки b_1 и k на плане ускорений совпадут с полюсом P_a , так как $\bar{a}_B = 0$ и $\bar{a}_K = 0$.

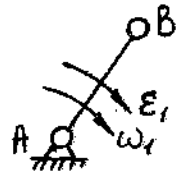
Звено совершает вращательное движение (кривошип, коромысло)

Дано: ω_1, ϵ_1 , положение звена в масштабе μ .

Требуется построить план скоростей и ускорений для звена 1.

Запишем векторные уравнения движения для скорости точки В в общем виде:

$$V_B = V_A + V_{BA}$$



Анализ этого уравнения показывает, что V_A - это вектор скорости точки А в переносном поступательном движении, он равен нулю. V_{BA} - вектор скорости точки В в относительном вращательном движении, он направлен перпендикулярно звену АВ в сторону ω_1 . Следовательно:

$$V_B = V_{BA}, \text{ но } V_{BA} = \omega_1 \cdot AB.$$

Выбираем масштаб μ_v [м/с·мм] и строим план скоростей, где

$$\overline{P_v b_1} = \frac{V_B}{\mu_v} \text{ [мм]}.$$

Чтобы построить план ускорений запишем векторное уравнение движения для ускорений точки В в общем виде:

$$\bar{a}_{B_1} = \bar{a}_A + \bar{a}_{B_1 A}^n + \bar{a}_{B_1 A}^t.$$

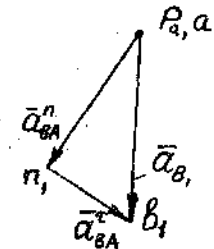
Анализ уравнения показывает, что \bar{a}_A - это вектор ускорения точки А в переносном поступательном движении, он равен нулю. $\bar{a}_{B_1 A}^n$ - вектор нормальной составляющей ускорения точки В относительно полюса А, он направлен от точки В к точке А по звену АВ.

Модуль $a_{B_1 A}^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB}$, $\bar{a}_{B_1 A}^t$ - вектор тангенциальной составляющей ускорения точки В относительно полюса А, он направлен перпендикулярно АВ в сторону заданного ϵ_1 .

Модуль $a_{B_1 A}^t = \epsilon_1 \cdot l_{AB}$. Следовательно, это уравнение решается графически с помощью плана ускорений. Выбираем масштаб плана ускорений μ_a [м/с²·мм] и строим план ускорений звена АВ:

$$\overline{P_a n_1} = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} \text{ [мм]},$$

$$\overline{n_1 b_1} = \frac{a_{BA}^t}{\mu_a} \text{ [мм]}.$$



Звено совершает сложное плоскопараллельное движение (шатун)

Из теоретической механики известно, что сложное движение тела в плоскости можно представить как сумму двух простых движений: переносного поступательного и относительного вращательного. На рис.2.5 изображены два мгновенных положения шатуна какого-то механизма: $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$. Перемещение шатуна из положения $A_1 B_1$ в положение $A_2 B_2$ можно схематично представить так, что это движение складывается из двух простых движений: переносного поступательного (при этом скорости всех точек равны между собой) и относительного вращательного (когда шатун поворачивается вокруг какой-то точки как центра мгновенного вращения в относительном движении).

На рис.2.5 показано, что движение шатуна, таково: из положения $A_1 B_1$ в положение $A_2 B'$ (переносное поступательное движение), а затем из положения $A_2 B'$ в положение $A_2 B_2$ (относительное вращательное движение). Абсолютная скорость точки В в этом случае:

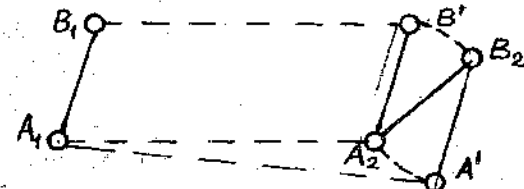


Рис 2.5. Движение шатуна на плоскости

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (2.14)$$

где \vec{V}_A - скорость переносного поступательного движения точки В (абсолютная скорость точки А); \vec{V}_{BA} - скорость относительного вращательного движения точки В относительно точки А. Движение шатуна из A_1B_1 в A_2B_2 можно представить и так: переносное поступательное движение из положения A_1B_1 в положение $A'B_2$, а затем относительное вращательное движение из положения $A'B_2$ в положение A_2B_2 . Тогда абсолютная скорость точки А будет:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{AB}, \quad (2.15)$$

где \vec{V}_B - скорость переносного поступательного движения точки А (абсолютная скорость точки В); \vec{V}_{AB} - скорость относительного вращательного движения точки А относительно точки В.

Такой прием позволяет найти скорость интересующей нас точки в сложном ее движении.

В практических задачах в качестве центра мгновенного вращения звена в относительном движении следует брать ту точку, скорость которой известна заранее или легко может быть определена. Как правило, такими свойствами обладают крайние кинематические пары структурных групп Ассур второго класса соответствующих механизмов.

Приведенные здесь сведения потребуются при доказательстве теоремы о плане скоростей, имеющей большое значение в приложениях. С помощью этой теоремы, в частности, разрешается вторая задача кинематического исследования механизмов: определение скоростей точек звеньев механизмов.

Кулиса с кулисным камнем

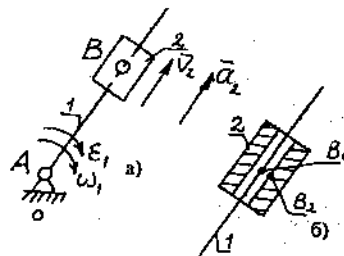


Рис. 2.6. Кулиса с кулисным камнем

Дано: Схема кулисы 1 с кулисным камнем 2, выполненная в μ масштабе; ω_1 ; ε_1 ; V_2 ; a_2 .

Требуется построить план скоростей и план ускорений в заданном положении.

Условно разрезая кулисный камень, (рис.2.6,б), выделяем две мгновенно совпадающие точки B_1 , B_2 , принадлежащие соответственно кулисе 1 и камню 2. Запишем векторное уравнение

движения для скорости точки B_2 камня кулисы в общем виде:

$$V_{B2} = V_{B1} + V_{B2B1}$$

Анализ уравнения показывает, что V_{B1} - это вектор переносной скорости точки B_1 при вращении ее относительно А. V_{B2B1} - вектор скорости относительного поступательного движения камня 2 относительно кулисы 1.

При этом имеем: $V_{B1} = \omega_1 \cdot l_{AB}$, $V_{B2B1} = V_2$

Выбираем масштаб плана скоростей μ_v [м/с·мм] и строим его, решая графически векторное уравнение.

Чтобы построить план ускорений, запишем векторное уравнение движения для ускорения точки B_2 камня кулисы в общем виде:

$$\vec{a}_{B2} = \vec{a}_{B1} + \vec{a}_{B2B1}^k + \vec{a}_{B2B1}^r$$

Анализ векторного уравнения показывает:

$$\vec{a}_{B1} = \vec{a}_{B1A}^n + \vec{a}_{B1A}^t$$

$\vec{a}_{B1A}^n = \omega_1^2 l_{AB}$, его вектор направлен по кулисе от точки В к точке А.

$\vec{a}_{B1A}^t = \varepsilon_1 l_{AB}$, его вектор направлен перпендикулярно кулисе в сторону ε_1 .

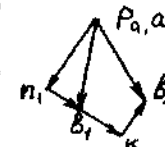
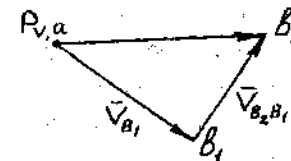
\vec{a}_{B2B1}^k - кориолисово ускорение, возникающее из-за наличия переносного вращательного движения кулисы и относительного поступательного движения кулисного камня.

$$\text{Модуль } \vec{a}_{B2B1}^k = 2V_{\text{отн}} \cdot \omega_{\text{пер}} = 2\omega_1 \cdot V_{B2B1}$$

Для определения направления вектора кориолисова ускорения надо вектор относительной скорости \vec{V}_{B2B1} повернуть на угол 90 градусов в сторону ω_1 .

\vec{a}_{B2B1}^r - вектор относительного поступательного ускорения, модуль его равен $a_{B2B1}^r = a_2$, он направлен по направляющей поступательной пары, т.е. по кулисе 1.

Выбираем масштаб плана ускорений μ_a [м/с²·мм] и строим его, решая графически векторное уравнение.



2.4.2 План относительных скоростей звена и его свойства

Теорема. План скоростей подобен очертанию твердого тела (звена), скорости точек которого он изображает, и повернут по отношению к данному телу на угол 90 градусов в сторону его мгновенного вращения.

Дано: 1. Плоское тело произвольной формы, на котором взяты три произвольные точки A, B, C, образующие треугольник.

2. Движение тела сложное, при этом известна абсолютная скорость произвольной точки, например точки A, а также угловая скорость ω относительного вращательного движения тела вокруг точки A как вокруг центра мгновенного вращения в относительном движении.

Найти: план скоростей тела. Доказательство будем вести для произвольно построенного треугольника ABC (рис. 2.7, а).

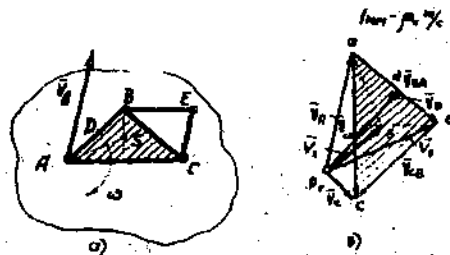


Рис. 2.7. План скоростей тела ABC

При построении плана скоростей нам надлежит графически изобразить векторы скоростей интересующих нас точек в виде отрезков. Для этого задаемся масштабом плана скоростей μ_v м/с. Абсолютная скорость точки B в сложном ее движении будет:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad (2.16)$$

Из произвольно выбранного полюса плана скоростей Pv откладываем заданный по условию задачи вектор скорости \vec{V}_A в виде отрезка Pva.

Второй слагаемый вектор равенства (2.16) по модулю находим по известной в механике формуле $V_{BA} = \omega \cdot l_{AB}$ м/с, а по направлению располагаем перпендикулярно прямой AB тела (скорость вращательного движения точки перпендикулярна к радиусу ее вращения). В масштабе μ_v плана скоростей эта скорость выражается отрезком ab.

Тогда абсолютная скорость точки B согласно равенству (2.16), будет найдена как геометрическая сумма двух слагаемых (отрезок Pvb на рис. 2.7, б).

Аналогично находим абсолютную скорость точки C в ее сложном движении. Составляем уравнение:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA} \quad (2.17)$$

При этом скорость V_A построена ранее. Модуль скорости V_{CA} , отложенный на рис. 2.7, б в виде отрезка ac перпендикулярно прямой AC тела, находим по формуле $V_{CA} = \omega \cdot l_{AC}$ м/с.

Можно также составить уравнение

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB} \quad (2.18)$$

и решить его графически.

В результате всего этого на рис. 2.7, б будет образован треугольник abc, вершины которого являются концами векторов абсолютных скоростей \vec{V}_A ; \vec{V}_B ; \vec{V}_C точек A, B, C тела, а стороны треугольника есть скорости относительного вращательного движения этих точек друг по отношению к другу.

Можно записать, что :

$$ab = \frac{V_{BA}}{\mu_v} = \frac{\omega}{\mu_v} l_{AB},$$

$$ac = \frac{V_{CA}}{\mu_v} = \frac{\omega}{\mu_v} l_{AC},$$

$$bc = \frac{V_{CB}}{\mu_v} = \frac{\omega}{\mu_v} l_{BC}.$$

Значит, стороны треугольника abc пропорциональны сторонам треугольника ABC, и треугольники эти подобны. По построению треугольник abc повернут к треугольнику ABC, на 90 градусов по направлению ω .

Следовательно, дабс есть план скоростей ΔABC , что и требовалось при доказательстве теоремы.

План скоростей есть геометрическое место точек концов векторов абсолютных скоростей точек тела. Это важное утверждение

вытекает из того обстоятельства, что, как отмечено выше, вершины треугольника abc являются концами векторов абсолютных скоростей точек A , B и C тела. Значит, любая точка d abc будет обладать этим свойством, т.е. является концом вектора абсолютной скорости соответствующей точки тела. Учитывая это, а также учитывая свойство геометрического подобия плана скоростей и тела, скорости точек которого он изображает, можно легко найти скорость любой интересующей нас точки.

Найдем, например, абсолютную скорость точки D , лежащей между точками A и B $\triangle ABC$. По пропорции

$$\frac{l_{AB}}{l_{AD}} = \frac{ab}{ad} \quad \text{находим} \quad \overline{ad} = \overline{ab} \frac{l_{AD}}{l_{AB}},$$

и тем самым определяем положение точки d на плане скоростей. Соединив полученную точку с полюсом, будем иметь отрезок Pvd , который в масштабе μ_v представляет интересующую нас скорость.

Можно легко найти, например, абсолютную скорость центра тяжести $\triangle ABC$. Центр тяжести лежит, как известно, на пересечении медиан. Построив медианы треугольника abc плана скоростей и соединив точку их пересечения s с полюсом, получим отрезок Pvs характеризующий скорость V_s . С успехом можно найти скорость любой интересующей нас точки тела и вне $\triangle ABC$, например, точки E .

Для этого точку E (рис.2.7,а) соединяем с двумя другими точками, скорости которых уже известны. Мы взяли точки B и C . Образовался новый треугольник BCE . Построив на плане скоростей подобный ему и повернутый на 90° треугольник bce , тем самым находим точку e и соединяем ее с полюсом. Отрезок Pve в масштабе μ_v определяет абсолютную скорость точки E тела. При этом любой отрезок на плане скоростей определяет собой скорость.

Из полюса Pv плана скоростей исходят все абсолютные скорости точек; относительные скорости определяются отрезками, не проходящими через полюс Pv .

2.4.3 План относительных ускорений звена и его свойства

Схематично представляя, что сложное плоское движение шатуна будет состоять из переносного поступательного и относительного вращательного (как это показано на рис.2.5) и полагая, что в общем случае каждое из этих простых движений не равномерное, а значит, скорость изменяется по времени, можно аналогично равенству (2.14), записать:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \quad (2.19)$$

где \bar{a}_B - абсолютное ускорение точки B в ее сложном плоском движении; \bar{a}_A - ускорение переносного поступательного движения точки B (абсолютное ускорение точки A); \bar{a}_{BA} - ускорение относительного вращательного движения точки B вокруг точки A как центра мгновенного вращения.

В общем случае ускорение \bar{a}_{BA} будет геометрической суммой двух составляющих: нормального ускорения \bar{a}_{BA}^n , характеризующего изменение скорости точки B по направлению в ее относительном движении вокруг точки A и тангенциального ускорения \bar{a}_{BA}^t , характеризующего изменение скорости точки B по величине. То есть можно записать

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t \quad (2.20)$$

Тогда уравнение (2.19) запишется в виде:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t. \quad (2.21)$$

Аналогичное уравнение можно записать для любой точки тела, совершающего сложное плоское движение.

Докажем теперь теорему о плане ускорений, с помощью которой разрешается задача кинематического исследования механизмов: определение ускорений точек звеньев механизмов.

Теорема. План ускорений подобен очертанию твердого тела /звена/, ускорение точек которого он изображает, и повернут по отношению к данному телу на угол $(180-\theta)$ в сторону мгновенного углового ускорения, где θ - угол между нормальным относительным и полным относительным ускорением любой точки тела в заданном мгновенном положении.

Дано: 1. Плоское тело произвольной формы, на котором взяты три произвольные точки A, B, C, образующие треугольник.

2. Движение тела сложное; при этом известно абсолютное ускорение произвольной точки, например точки A, а также угловая скорость ω и угловое ускорение ϵ относительного вращательного движения тела вокруг точки A как вокруг центра мгновенного вращения в относительном движении.

Найти: план ускорений тела.

Доказательство будем вести для произвольно построенного треугольника ABC (рис.2.8, а).

При построении плана ускорений мы будем графически изображать векторы ускорений интересующих нас точек в виде отрезков. Для этого задаемся масштабом плана ускорений μ_a .

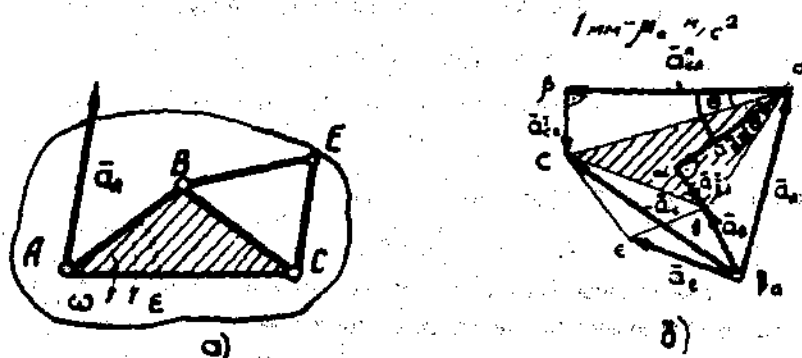


Рис.2.8. План ускорений тела ABC

Найдем абсолютные ускорения точек - вершин треугольника ABC. Абсолютное ускорение точки A - \vec{a}_A - задано по условию задачи. Абсолютное ускорение точки B будет равно:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t. \quad (2.22)$$

Из произвольно выбранного на чертеже полюса плана ускорений Pa проводим вектор ускорения \vec{a}_A в виде отрезка Pa.

Второй слагаемый вектор уравнения (2.22) - нормальное ускорение точки B в ее относительном вращательном движении вокруг точки A изображается в виде отрезка \vec{a}^n , построенного из конца предыдущего вектора Pa.

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot l_{AB}$$

По известной из механики формуле находим модуль этого ускорения:

и откладываем его на чертеже отрезком $\vec{a}^n = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}$.
Направление вектора ускорения \vec{a}_{BA}^n определяется исходя из его физического смысла: нормальное ускорение точки при ее вращательном движении действует по радиусу вращения к центру вращения. В нашем случае вектор ускорения \vec{a}_{BA}^n на рис. 2.8,б построен параллельно прямой AB на рис.2.8,а и направлен так, как действует это ускорение в действительности: от точки B к точке A - центру мгновенного вращения.

Третий слагаемый вектор уравнения (2.22) - тангенциальное ускорение точки B в ее относительном вращательном движении вокруг точки A изображается в виде отрезка \vec{a}^t , построенного из конца предыдущего вектора \vec{a}^n .

Модуль этого ускорения находится по известной из механики формуле: $a_{BA}^t = \epsilon \cdot l_{AB}$ м/с², а направление - исходя из физического смысла этого ускорения. Тангенциальное ускорение точки при ее вращательном движении действует по касательной к траектории, т.е. перпендикулярно к радиусу вращения и к нормальному ускорению. В нашем случае вектор ускорения \vec{a}_{BA}^t на рис.2.8,б перпендикулярен вектору ускорения \vec{a}_{BA}^n или прямой AB на рис.2.8,а; причем направление вектора \vec{a}_{BA}^t таково, что будучи перенесенным параллельно самому себе

в точку В тела, он создает вокруг точки А момент, совпадающий по направлению с угловым ускорением ε .

С учетом всего изложенного можно на основании уравнения (2.22) найти ускорение \vec{a}_B как замыкающий вектор \vec{Pab} трех составляющих векторов: \vec{Paa} ; \vec{aa} ; \vec{ab} .

Абсолютное ускорение точки С можно найти, составив уравнение, аналогичное уравнению (2.22), а именно:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^t. \quad (2.23)$$

Повторяя только что изложенную логику рассуждений и имея ввиду, что $a_{CA}^n = \omega \cdot l_{AC}$ м/с² и $a_{CA}^t = \varepsilon \cdot l_{AC}$ м/с², найдем ускорение \vec{a}_C как замыкающий вектор \vec{Pac} трех составляющих векторов: \vec{Paa} ; $\vec{a\beta}$; $\vec{\beta c}$.

Соединим точки а и b прямой линией. На плане ускорений этот отрезок в масштабе μ_a характеризует ускорение \vec{a}_{BA} (см. 2.20).

Аналогично, отрезок ас характеризует ускорение

$$\vec{a}_{CA} = \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^t. \quad (2.22)$$

Тогда, очевидно, отрезок bc на плане ускорений будет выражать относительное ускорение \vec{a}_{CB} .

В этом можно было бы легко убедиться, составив векторное уравнение, в котором ускорение точки С находится в функции уже известного ускорения точки В тела.

Таким образом, на рис. 2.8,б образован $\triangle abc$, вершины которого являются концами векторов абсолютных ускорений точек А, В, С тела, а стороны треугольника - ускорениями относительного вращательного движения точек А, В, С тела друг по отношению к другу.

Докажем, что $\triangle abc$ подобен $\triangle ABC$ и повернут к нему на угол $(180-\theta)$. Тем самым мы докажем, что $\triangle abc$ есть план ускорений $\triangle ABC$:

$$ab = \sqrt{(a\alpha)^2 + (ab)^2} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^t)^2} = \sqrt{\omega^4 l_{AB}^2 + \varepsilon^2 l_{AB}^2} = l_{AB} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

$$ac = \sqrt{(a\beta)^2 + (\beta c)^2} = \sqrt{(a_{CA}^n)^2 + (a_{CA}^t)^2} = \sqrt{\omega^4 l_{AC}^2 + \varepsilon^2 l_{AC}^2} = l_{AC} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

$$\frac{ab}{ac} = \frac{l_{AB} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}{l_{AC} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = \frac{l_{AB}}{l_{AC}}.$$

Здесь мы доказали, что стороны $\triangle abc$ и $\triangle ABC$ пропорциональны.

Докажем теперь, что углы равны. Оказывается, что $\triangle abc$ подобен $\triangle ABC$ по условию пропорциональности сторон:

$$\frac{a\alpha}{ab} = \frac{a_{BA}^n}{a_{BA}^t} = \frac{\omega^2 l_{AB}}{\varepsilon l_{AB}} = \frac{\omega^2}{\varepsilon},$$

$$\frac{a\beta}{\beta c} = \frac{a_{CA}^n}{a_{CA}^t} = \frac{\omega^2 l_{AC}}{\varepsilon l_{AC}} = \frac{\omega^2}{\varepsilon},$$

$$\frac{a\alpha}{ab} = \frac{a\beta}{\beta c},$$

и вследствие равенства углов: $\angle a\alpha\beta = 90^\circ$; $\angle a\beta c = 90^\circ$.

В подобных треугольниках соответственные углы равны.

Значит, $\angle bac = \angle ca\beta = \angle \theta$.

Здесь следует обратить внимание на то обстоятельство, что θ - угол между нормальным относительным ускорением и полным относительным ускорением.

Далее поступим так: к равным углам добавим один и тот же угол; от этого равенство не изменится:

$$\angle bac + \angle aac = \angle bac,$$

$$\angle ca\beta = \angle aac = \angle a\alpha\beta, \quad \text{откуда } \angle bac = \angle a\alpha\beta,$$

$\angle a\alpha\beta$ на рис. 2.8,б равен $\angle BAC$ на рис. 2.8,а. Причем эти углы повернуты друг к другу на 180 градусов. Это вытекает из построения плана ускорений. Ведь ускорение \vec{a}_{BA}^n проведено параллельно АВ от В к А, а ускорение \vec{a}_{CA}^n - параллельно АС от С к А. Значит, $\angle bac = \angle BAC$.

Итак, стороны треугольников abc и ABC пропорциональны и углы равны; значит, эти треугольники подобны. Из построения видно, что $\triangle abc$ повернут к $\triangle ABC$ на угол 180 градусов в сторону мгновенного углового ускорения ε .

Из доказательства теоремы вытекает, что треугольник abc есть план ускорений треугольника ABC тела.

План ускорений есть геометрическое место точек концов векторов абсолютных ускорений точек тела. Этому свойству удовлетворяют точки a, b, c - вершины треугольника abc , а значит, оно справедливо для всех остальных точек.

Аналогично тому, как это имело место применительно к плану скоростей, можно, пользуясь указанным свойством, а также свойством подобия тела и его плана ускорений, найти ускорение любой интересующей нас точки.

Абсолютные ускорения точек проходят через полюс P_a , а относительные ускорения не проходят через него. Любой отрезок на плане ускорений характеризует в масштабе μ_a ускорение.

Возьмем лишь один пример: определим абсолютное ускорение точки E тела, расположенной вне ΔABC . Соединим точку E с двумя любыми другими, если ускорения их уже известны. На рис.2.7,а образовался ΔBCE , строим подобный ему Δbce на плане ускорений и получаем точку e - конец вектора абсолютного ускорения точки E тела. Вектор, проведенный из полюса в точку e и будет искомым ускорением \vec{a}_E .

Легко найти ускорение точки E в относительном движении. Так относительное ускорение \vec{a}_{EC} характеризуется отрезком ec , а ускорение \vec{a}_{EA} соответствует отрезку, соединяющему точки e и a .

При решении задач по кинематическому исследованию механизмов, необходимо учитывать следующее (причем, все сказанное для плана скоростей будет справедливым и для плана ускорений):

1. План скоростей механизма включает в себя планы скоростей звеньев, образующих этот механизм.
2. При построении плана скоростей механизма, следует начинать с плана скоростей ведущего звена, переходя к последующим группам звеньев в соответствии со структурной формулой строения механизма.
3. Чтобы изобразить планы скоростей звена, достаточно найти скорости двух его точек. Исключение составляют такие звенья, размерами которых можно пренебречь; для них достаточно знать скорость одной точки (например, ползуны в механизмах).

2.5. Графоаналитическая кинематика структурных групп 2-го класса

В результате структурного анализа записывается формула строения механизма, которая указывает на последовательность кинематического анализа. При этом первая из групп 2-го класса может быть присоединена либо к 2-м механизмам 1-го класса, либо к механизму 1-го клас-

са и к стойке; вторая группа может быть присоединена к предыдущей группе или к механизму 1-го класса и к стойке.

Во всех случаях законы движения крайних элементов группы известны или легко могут быть определены.

Следовательно, задачей при этом является: составление системы векторных уравнений, определяющих движение соответствующей точки средней кинематической пары группы и решение ее графоаналитическим методом планов скоростей и ускорений.

2.5.1. Графоаналитическая кинематика структурных групп 2 класса 1-го и 2-го вида

Задачу решаем на примере механизма пресса. Пусть требуется построить план скоростей и план ускорений механизма кривошипно-рычажного пресса (см.рис.2.9) в заданном его мгновенном положении. Задан закон движения ведущего звена - (вращение кривошипа 1 с постоянной угловой скоростью) и кинематическая схема механизма.

Схему механизма в заданном его мгновенном положении строим в выбранном масштабе длин μ_l м/мм на рис.2.9.

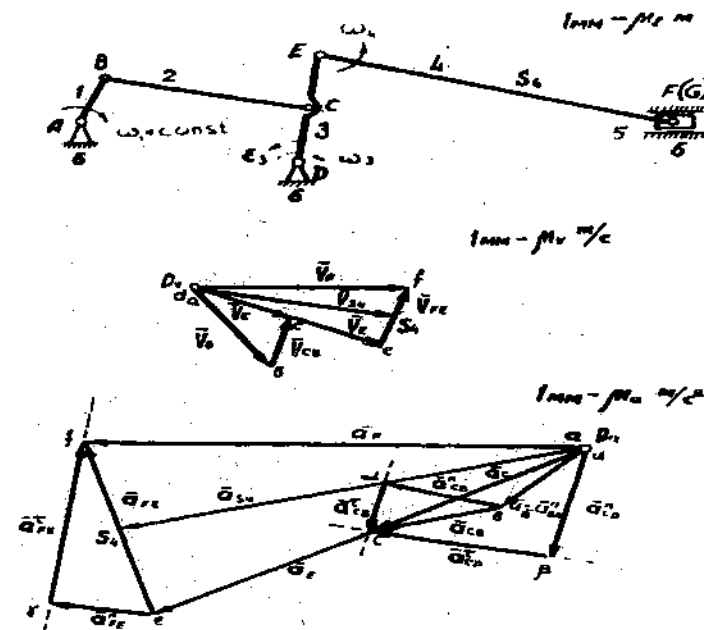


Рис. 2.9. Механизм пресса

В произвольном месте чертежа выбираем полюс плана скоростей P_v , задаемся масштабом скоростей μ_v [м/с·мм]. Строим план скоростей ведущего звена - кривошипа 1.

$V_B = \omega_1 l_{AB}$ м/сек, причем $\vec{V}_B \perp \vec{l}_{AB}$. На плане скоростей эта скорость характеризуется отрезком $\overline{P_v b} = \frac{V_B}{\mu_v}$ мм.

Конец вектора V_B обозначаем точкой b , скорость $V_A = 0$, поэтому конец вектора этой скорости, - точка a совпадает с полюсом P_v . Отрезок ab есть план скоростей кривошипа l_{AB} .

Переходим к построению плана скоростей первой присоединенной к механизму 1 класса группе Ассур, образованной шатуном 2 и коромыслом 3, а также кинематическими парами B, C, D . Строим план скоростей шатуна 2. Шатун совершает сложное плоское движение, которое можно представить как сумму переносного поступательного движения и относительного вращательного движения.

Скорость точки B шатуна найдена нами, когда мы только что рассматривали эту точку, принадлежащую кривошипу

1. Найдем скорость точки C шатуна 2:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB} \quad (2.25)$$

Здесь V_C - абсолютная скорость точки C шатуна в ее сложном плоском движении.

V_B - скорость переносного поступательного движения точки C (абсолютная скорость точки B).

V_{CB} - скорость относительного вращательного движения C вокруг точки B , как центра мгновенного вращения V_{CB} перпендикулярна BC .

Кроме этого, точка C принадлежит коромыслу 3 и вместе с ним поворачивается вокруг неподвижной точки D , значит V_C перпендикулярна DE .

$$\vec{V}_C = \vec{V}_D + \vec{V}_{CD} \quad (2.26)$$

Учитывая изложенное, можно графически решить уравнение (2.26) и найти V_C как геометрическую сумму двух составляющих скоростей.

Конец вектора V_C обозначаем точкой c . Отрезок bc есть план ускорений шатуна BC . Строим план скоростей коромысла 3. У этого звена $V_D = 0$, значит, конец вектора этой скорости - точка d совпадает с полюсом P_v . Планом скоростей части CD коромысла 3 является отрезок cd .

Тогда планом скоростей всего 3-го звена будет отрезок de , найденный в силу подобия плана скоростей и звена из пропорции:

$$\frac{\overline{de}}{\overline{dc}} = \frac{DE}{DC}$$

При этом точка e на плане скоростей есть конец вектора скорости V_E , а сам этот вектор будет равен $V_E = \overline{P_v e} \cdot \mu_v$ м/с.

Далее рассматриваем группу звеньев, образованную шатуном 4 и ползуном 5.

Строим план скоростей шатуна 4. Шатун EF совершает сложное плоское движение. Скорость точки E мы только что нашли, рассматривая эту точку, принадлежащую коромыслу 3.

Запишем векторное уравнение движения скорости точки F шатуна в ее сложном движении:

$$\vec{V}_F = \vec{V}_E + \vec{V}_{FE} \quad (2.27)$$

Из конца вектора скорости V_E - точки e на плане скоростей, проводим линию, на которой должен лежать вектор скорости V_{FE} . Это скорость точки F в ее относительном вращательном движении вокруг точки E . Вектор этой скорости перпендикулярен шатуну EF .

Кроме этого мы знаем, что точка F принадлежит не только шатуну, но и ползуну 5, поэтому абсолютная скорость V_F будет совпадать с траекторией движения ползуна, т.е. будет направлена горизонтально.

Уравнение движения для скорости этой точки будет иметь вид:

$$\vec{V}_F = \vec{V}_{FO} + \vec{V}_{FFO} \quad (2.28)$$

С учетом изложенного, решая графически совместно уравнения (2.27) и (2.28), определяем абсолютную скорость точки F . Конец вектора V_F обозначим точкой f . Отрезок ef является планом скоростей шатуна EF .

Планом скоростей ползуна 5 является точка F (дело в том, что все точки ползуна имеют одинаковые скорости).

Здесь уместно еще раз напомнить важное свойство плана скоростей звена, которое вытекает из доказанной теоремы: план скоростей есть геометрическое место точек концов векторов абсолютных скоростей точек звена. Пользуясь этим свойством, а также свойством подобия звена и плана его скоростей, можно найти абсолютную скорость любой интересующей нас точки.

Найдем, например, скорость центра тяжести S_4 шатуна 4. Условимся, что точка S_4 расположена посередине шатуна EF . По подобию находим точку S_4 посередине отрезка ef и из полюса проводим вектор $\overline{P_{vS_4}}$, который в масштабе μ_v характеризует скорость V_{S_4} . Если нас интересует скорость относительного движения центра тяжести относительно точки F , например, то она будет изображаться отрезком fS_4 на плане скоростей.

С помощью планов скоростей можно найти угловые скорости вращательного движения звеньев в данном положении механизма.

Так, для коромысла 3 абсолютная угловая скорость будет:

$$\omega_3 = \frac{V_E}{l_{DE}} = \frac{\overline{P_v e} \cdot \mu_v}{l_{FE}} 1 / c.$$

Для шатуна 4 найдем аналогично относительную угловую скорость:

$$\omega_4 = \frac{V_{FE}}{l_{FE}} = \frac{(\overline{fe}) \cdot \mu_v}{l_{FE}} 1 / c,$$

и для этого звена поясним, как найти направление угловой скорости.

Чтобы найти направление угловой скорости ω_4 , надо мысленно перенести из плана скоростей вектор линейной скорости $\overline{V_{FE}}$, приложив его в точку F механизма. Направление момента этого вектора относительно точки E совпадает с направлением ω_4 . Воспользовавшись тем же правилом, можно найти направление ω_3 .

Методика построения плана ускорений механизма во многом сходна с построением плана скоростей.

Выбираем масштаб ускорений μ_a м/с² мм.

Строим план ускорений кривошипа 1:

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^t}, \quad \overline{a_A} = 0; \quad \overline{a_{BA}^t} = 0, \text{ т.к. } \omega_1 = \text{const} \text{ и } \varepsilon_1 = 0,$$

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_1^2 l_{AB}, \text{ м/с}^2, \text{ причем } \overline{a_{BA}^n} // l_{AB},$$

и этот вектор направлен от точки B к точке A звена.

На плане ускорений этот отрезок $\overline{Pab} = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}$, мм.

Конец вектора ускорения $\overline{a_{BA}^n}$ обозначаем буквой b. Ускорение $\overline{a_A} = 0$, поэтому конец вектора этого ускорения - точка a совпадает с полюсом Pa. Отрезок ab есть план ускорений кривошипа AB. Строим план ускорений шатуна 2. Ускорение точки C шатуна в ее сложном движении можно записать так:

$$\overline{a_C} = \overline{a_B} + \overline{a_{CB}},$$

где $\overline{a_B}$ - ускорение переносного поступательного движения точки C (аб-

солютное ускорение точки B); $\overline{a_{CB}}$ - ускорение относительного вращательного движения точки C вокруг точки B.

Ускорение

$$\overline{a_{CB}} = \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^t}, \quad (2.29)$$

тогда

$$\overline{a_C} = \overline{a_B} + \overline{a_{CB}^n} + \overline{a_{CB}^t}. \quad (2.30)$$

Ищем результирующий вектор $\overline{a_C}$ как геометрическую сумму трех составляющих. Вектор ускорения $\overline{a_B}$ уже найден, когда мы рассматривали точку B, принадлежащую кривошипу 1.

Вектор нормального относительного ускорения имеет модуль

$$\overline{a_{CB}^n} = \frac{V_{CB}^2}{l_{CB}} = \frac{[(\overline{cb}) \cdot \mu_v]^2}{l_{CB}} \text{ м/с}^2,$$

здесь отрезок cb берется в мм из плана скоростей. Ускорение откладывается в виде отрезка

$$\overline{ba} = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} \text{ мм.}$$

параллельно шатуну BC это ускорение направлено от точки C к точке B шатуна.

Вектор тангенциального ускорения $\overline{a_{CB}^t} \perp \overline{a_{CB}^n}$. Но, к сожалению, найти модуль этого ускорения по формуле $\overline{a_{CB}^t} = \varepsilon_2 \cdot l_{CB}$ мы не можем, так как угловое ускорение ε_2 нам пока не известно. При этом, результирующий вектор $\overline{a_C}$ с помощью одного лишь уравнения (2.30) найти нельзя. Рассмотрим поэтому точку C, принадлежащую коромыслу 3, и запишем ускорение этой точки исходя из движения коромысла 3:

$$\overline{a_C} = \overline{a_D} + \overline{a_{CD}^n} + \overline{a_{CD}^t}. \quad (2.31)$$

Нормальную составляющую абсолютного ускорения точки C относительно точки D проводим из полюса Pa параллельно CD (это ускорение направлено от точки C к точке D). Модуль этого вектора

$$a_{CD}^n = \frac{V_C^2}{l_{CD}} = \frac{(PVC \cdot \mu_v)^2}{l_{CD}} \text{ м/с}^2,$$

где отрезок PVC взят в мм из плана скоростей.

На плане ускорений ускорение \bar{a}_{CD}^n характеризуется отрезком $\overline{Pa\beta} = \frac{\bar{a}_{CD}^n}{\mu_a}$, мм. Тангенциальное ускорение $\bar{a}_{CD}^t \perp \bar{a}_{CD}^n$, но модуль этого вектора мы так же не знаем, как и вектора \bar{a}_{CB}^t .

Учитывая, что, как в уравнении (2.30), так и в уравнении (2.31) результирующим вектором является искомое ускорение \bar{a}_C , то проведя линии действия векторов \bar{a}_{CB}^t и \bar{a}_{CD}^t (из уравнения (2.25) и из уравнения (2.31) и определив точку их пересечения с, мы тем самым находим отрезок \overline{Pac} , которым характеризуется ускорение \bar{a}_C .

Тогда, очевидно, отрезком \overline{ac} будет определяться ускорение \bar{a}_{CB}^t , а отрезком \overline{bc} - ускорение \bar{a}_{CD}^t в масштабе μ_a .

Согласно уравнению (2.29), найдем полное относительное ускорение \bar{a}_{CB} , как геометрическую сумму двух составляющих ускорений \bar{a}_{CB}^n и \bar{a}_{CB}^t . Отрезок bc будет планом ускорений шатуна BC. Строим план ускорений коромысла 3. Ускорение $\bar{a}_D = 0$, значит конец вектора этого ускорения - точка d совпадает с полюсом. Планом ускорений части CD коромысла 3 является отрезок cd. Тогда планом ускорений всего звена DE будет отрезок de, найденный в силу подобия плана ускорений и звена из пропорции

$$\frac{\overline{de}}{\overline{dc}} = \frac{DE}{DC}.$$

При этом точка e на плане ускорений есть конец вектора ускорения \bar{a}_E , а сам этот вектор будет равен

$$a_E = (\overline{Pae}) \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2.$$

Строим план ускорений шатуна 4. Ускорение точки F шатуна можно записать так:

$$\bar{a}_F = \bar{a}_E + \bar{a}_{FE}^n + \bar{a}_{FE}^t, \quad (2.32)$$

где

$$\bar{a}_{FE}^n + \bar{a}_{FE}^t = \bar{a}_{FE}, \quad (2.33)$$

\bar{a}_E - ускорение переносного поступательного движения точки F (абсолютное ускорение точки E). Это ускорение нами только найдено при рассмотрении движения точки E вместе с коромыслом 3; \bar{a}_{FE}^n - нормальное ускорение относительного вращательного движения точки F относительно точки E.

$$\text{Модуль этого ускорения } a_{FE}^n = \frac{V_{FE}^2}{l_{FE}} = \frac{(\overline{fe} \cdot \mu_v)^2}{l_{FE}}, \text{ м/с}^2.$$

Ускорение откладывается в виде отрезка $\overline{ye} = \frac{\bar{a}_{FE}^n}{\mu_a}$ мм

параллельно шатуну FE.

Ускорение \bar{a}_{FE}^n направлено от точки F к точке E шатуна.

\bar{a}_{FE}^t - тангенциальное ускорение относительного вращательного движения точки F относительно точки E. Ускорение $\bar{a}_{FE}^t \perp \bar{a}_{FE}^n$, но модуль этого ускорения пока не известен (в формуле $\bar{a}_{FE}^t = \varepsilon_4 \cdot l_{FE}$ нам не известно угловое ускорение ε_4).

В этой связи возникает на первый взгляд, препятствие: как согласно уравнению (2.32) искать результирующий вектор \bar{a}_F , когда неизвестен модуль последнего составляющего вектора \bar{a}_{FE}^t ? Нужны дополнительные данные.

Их можно получить, рассматривая точку F, принадлежащую ползуну 5. Движение ползуна при работе механизма возвратно-поступательное по горизонтали. Значит, абсолютное ускорение \bar{a}_F направлено горизонтально и определяется векторным уравнением

$$\bar{a}_F = \bar{a}_{F_0} + \bar{a}_{FF_0}^k + \bar{a}_{FF_0}^t. \quad (2.34)$$

Этого достаточно, чтобы достроить векторный четырехугольник согласно уравнению (2.32). Для этого из полюса Ра проводим линию действия результирующего вектора \bar{a}_F , а из точки γ проводим линию действия составляющего вектора \bar{a}_{FE}^i . Точка пересечения f определяет отрезок \overline{Paf} , которым характеризуется ускорение \bar{a}_F :

$$\bar{a}_F = (\overline{Paf}) \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2$$

и отрезок γf, которым характеризуется ускорение \bar{a}_{FE}^i :

$$\bar{a}_{FE}^i = (\overline{\gamma f}) \cdot \mu_a, \text{ м/с}^2.$$

Согласно уравнению (2.33) найдем полное относительное ускорение \bar{a}_{FE} . На плане ускорений этот вектор характеризуется отрезком ef. Отрезок ef есть план ускорений шатуна EF. Планом ускорений ползуна 5 является точка f.

План ускорений есть геометрическое место точек концов векторов абсолютных ускорений точек звена, кроме этого план ускорений звена подобен ему. Учитывая эти два свойства, можно найти ускорение любой интересующей нас точки. Найдем ускорение центра тяжести S_4 шатуна 4. Для этого по подобию находим точку S_4 на плане ускорений ef этого звена и из полюса проводим в эту точку вектор Pas_4 , который в масштабе μ_a является ускорением \bar{a}_{S_4} .

С помощью плана ускорений найдем угловое ускорение коромысла 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{\bar{a}_{CD}^i}{l_{CD}} = \frac{(\overline{\beta C}) \cdot \mu_a}{l_{CD}}, \quad 1/\text{с}^2.$$

Чтобы найти направление углового ускорения ε_3 , надо мысленно приложить вектор \bar{a}_{CD}^i в точку С звена. Направление момента этого вектора относительно D совпадает с направлением ε_3 (в нашем случае - против часовой стрелки).

Сопоставляя направления ω_3 и ε_3 на рис.2.9, заключаем, что коромысло 3 в заданном его мгновенном положении имеет замедленное движение.

Угловое ускорение относительного движения шатуна 4 определяется по формуле:

$$\varepsilon_4 = \frac{\bar{a}_{FE}^i}{l_{FE}} = \frac{(\overline{\gamma f}) \cdot \mu_a}{l_{FE}}, \quad 1/\text{с}^2.$$

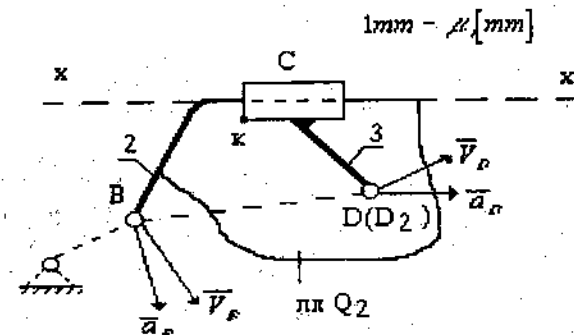
Направление его находится по тому же правилу, что и ε_3 .

Методика, изложенная в данной задаче, пригодна для построения планов скоростей и ускорений многих шарнирно-рычажных механизмов, однако у некоторой категории механизмов - кулисных механизмов - решение этой задачи имеет свою специфику.

2.5.2. Графоаналитическая кинематика структурной группы 2-го класса 3-го вида

Кинематические особенности группы

1. Относительные угловые скорости и угловые ускорения звеньев, образующих группу равны между собой ($\omega_2 = \omega_3$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$).
2. Относительные линейные скорости и ускорения разных точек звеньев группы равны между собой.



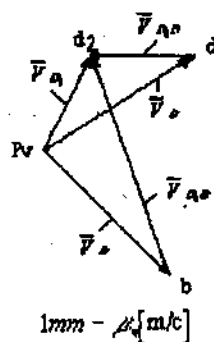
Дано: $\vec{V}_B; \vec{a}_B; \vec{V}_D; \vec{a}_D$.

Найти: $\omega_2 = \omega_3; \epsilon_2 = \epsilon_3$.

Свяжем со звеном 2 плоскость Q_2 . Под шарниром Д обозначим точку D_2 , принадлежащую звену 2. Запишем систему векторных уравнений, проведем ее анализ и строим план скоростей в масштабе μ_v по этим уравнениям:

$$\begin{cases} \vec{V}_{D_2,3} = \vec{V}_{B_1,2} + \vec{V}_{D_2,3B_1,2} \\ \vec{V}_{D_2,3} = \vec{V}_D + \vec{V}_{D_2,D} \end{cases} \quad \omega_2 = \omega_3 = \frac{V_{D_2B}}{l_{DB}} = \frac{(bd_2)\mu_v}{BD_2\mu_l}, [1/c].$$

$\omega_2 = \omega_3$ и направлено против часовой стрелки.



Теперь может быть найдена абсолютная скорость любой точки звеньев группы.

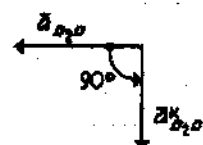
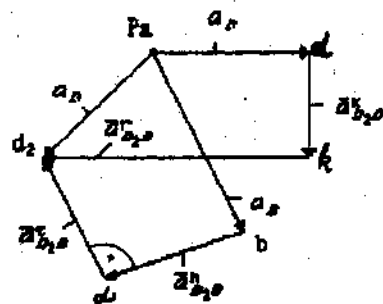
Например:

$$\vec{V}_{K_3} = \vec{V}_D + \vec{V}_{K_3D}; \quad \vec{V}_{K_3D} = \omega_3 l_{K_3D}.$$

Запишем систему уравнений для построения плана ускорений:

$$\begin{cases} \vec{a}_{D_2} = \vec{a}_B + \vec{a}_{D_2B}^n + \vec{a}_{D_2B}^t \\ \vec{a}_{D_2} = \vec{a}_D + \vec{a}_{D_2D}^K + \vec{a}_{D_2D}^I \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{a}_{D_2B}^n = \omega_2^2 l_{D_2B}, \frac{M}{c^2} \\ \vec{a}_{D_2D}^K = 2V_{D_2D} \omega_3, \frac{M}{c^2} \end{cases}$$

Выбираем масштаб: $1\text{мм} \rightarrow \mu_a \left[\frac{M}{c^2} \right]$, строим план ускорений.



При этом определяем направление кориолисова ускорения $\vec{a}_{A_2A}^k$:

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = \frac{a_{D_2B}^t}{l_{D_2B}} = \frac{(ad_2)\mu_a}{D_2B\mu_l}, \left[\frac{1}{c^2} \right]$$

Направление $\epsilon_2 = \epsilon_3$ будет против часовой стрелки.

Теперь может быть найдено абсолютное ускорение любой точки звеньев группы.

Например:

$$\vec{a}_{K_3} = \vec{a}_D + \vec{a}_{K_3D}^n + \vec{a}_{K_3D}^t$$

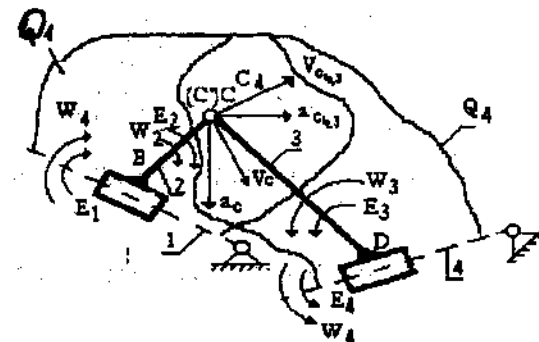
$$\vec{a}_{K_3D}^n = \omega_3^2 l_{K_3D}; \left[\frac{M}{c^2} \right]; \vec{a}_{K_3D}^t = \epsilon_3 l_{K_3D}; \left[\frac{M}{c^2} \right].$$

2.5.3 Графоаналитическая кинематика структурной группы 2-го класса 4-го вида

Кинематические особенности группы 4-го вида

Дано: ω_1 и ω_4 , E_1 и E_4

Найти: \vec{C}_{23} и $\vec{V}_{отн}$, $\vec{a}_{C_{23}}$ и $\vec{a}_{отн}$.



1.Звено 2 образует поступательную пару В со звеном 1, входящим в механизм 1 класса. Сложное движение звена 2 складывается из

переносного вращательного движения вместе со звеном 1 ($\omega_1; \varepsilon_1$) и относительного поступательного движения, вдоль направляющей этой поступательной пары В.

2. Относительные угловые скорости и угловые ускорения звеньев 1 и 2 равны ($\omega_1 = \omega_2$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$).

3. Звено 3 образует поступательную пару Д со звеном 4, входящим также в механизм 1 класса.

Сложное движение звена 3 складывается из переносного вращательного движения вместе со звеном 4 (ω_4 и ε_4) и относительного поступательного движения вдоль направляющей этой поступательной пары Д.

4. Относительные угловые скорости и угловые ускорения звеньев 3 и 4 равны.

5. Звенья 1 и 4- ведущие, поэтому заданы законы движения этих звеньев, т.е. известны ω_1 и ω_4 ; ε_1 и ε_4 .

6. Здесь имеем 2 поступательные пары, следовательно, в обоих уравнениях для \bar{a}_C должно появиться \bar{a}^k .

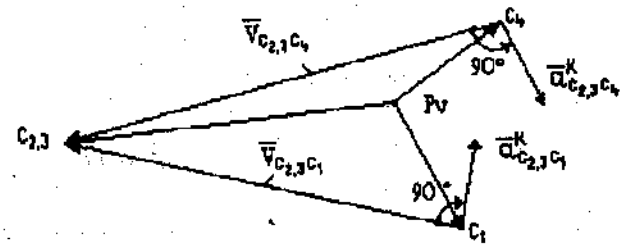
Свяжем звено 1 с плоскостью Q_1 , а звено 4 с плоскостью Q_4 . Рассматривая движение точки С, поочередно со 2-м и с 3-м звеньями, можем составить следующие векторные уравнения движения и проведем их анализ:

$$\begin{cases} \bar{V}_{C_{2,3}} = \bar{V}_{C_1} + \bar{V}_{C_{2,3}C_1} \\ \bar{V}_{C_{2,3}} = \bar{V}_{C_4} + \bar{V}_{C_{2,3}C_4} \end{cases}$$

$\bar{V}_{C_{2,3}C_1}$, направлен параллельно направляющей в поступательной паре В.

$\bar{V}_{C_{2,3}C_4}$, направлен параллельно направляющей в поступательной паре Д.

Выбираем μ_v и строим план скоростей.



Находим величины абсолютных и относительных скоростей:

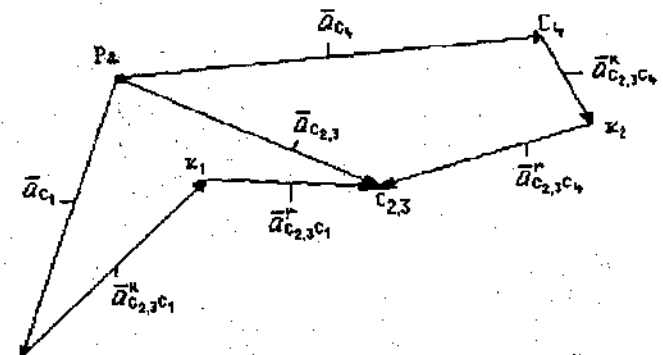
$$V_{C_{2,3}} = (PVC_{2,3})\mu_v; V_{C_{2,3}C_1} = (C_1C_{2,3})\mu_v; V_{C_{2,3}C_4} = (C_4C_{2,3})\mu_v.$$

Проведем анализ ускорений данной группы.

Рассматривая движение точки С соответственно со 2-м и с 3-м звеньями, можем составить векторные уравнения движения для плана ускорений, а затем проведем их анализ. Обращаем внимание, что эти уравнения базируются на векторных уравнениях движения для плана скоростей:

$$\begin{cases} \bar{a}_{C_{2,3}} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}^k_{C_{2,3}C_1} + \bar{a}^r_{C_{2,3}C_1} \\ \bar{a}_{C_{2,3}} = \bar{a}_{C_4} + \bar{a}^k_{C_{2,3}C_4} + \bar{a}^r_{C_{2,3}C_4} \end{cases}$$

Выбираем μ_a и строим план ускорений.



Находим величины абсолютных и относительных ускорений:

$$a_{C_{2,3}} = (PaC_{2,3})\mu_a; a^r_{C_{2,3}C_1} = (K_1C_{2,3})\mu_a; a^r_{C_{2,3}C_4} = (K_2C_{2,3})\mu_a.$$

2.5.4. Графоаналитическая кинематика структурной группы 2-го класса 5-го вида

Кинематические особенности группы

1. Здесь 2-е звено входит в поступательную пару с 3-м звеном, а 3-е звено в поступательную пару с 4-м звеном. При этом 4-е звено входит в механизм 1-го класса, поэтому: $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4$; $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4$, и они известны по условию.

2. Оба уравнения для плана ускорений будут содержать \bar{a}^k (Кориолисово ускорение).

Дано:

$$\omega_2 = \omega_3 = \omega_4;$$

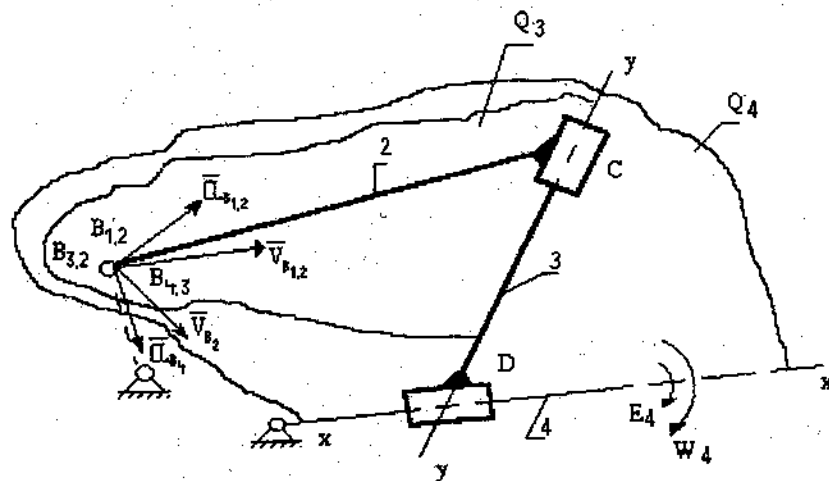
$$\bar{V}_{B_{1,2}}; \bar{V}_{B_4};$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4;$$

$$\bar{a}_{B_{1,2}}; \bar{a}_{B_4}.$$

Найти:

$$\bar{V}_{B_{3,2}}; \bar{a}_{B_{3,2}}; \bar{a}_{B_{3,2}B_{1,2}}; \bar{a}_{B_{3,2}B_4}.$$



Свяжем плоскость Q_4 с 4-м звеном и поместим точку B_4 , принадлежащую пл. Q_4 под шарниром В.

Со звеном 3 свяжем плоскость Q_3 , совпадающую с 3-м звеном и помечаем на этой плоскости точку $B_{3,2}$, совпадающую с точкой В.

Рассматривая сложное движение точки $B_{3,2}$ соответственно со 2-м звеном и с 3-м звеном, запишем векторные уравнения движения. Затем проанализируем эти уравнения:

$$\begin{cases} \bar{V}_{B_{3,2}} = \bar{V}_{B_{1,2}} + \bar{V}_{B_{3,2}B_{1,2}} \\ \bar{V}_{B_{3,2}} = \bar{V}_{B_4} + \bar{V}_{B_{3,2}B_4} \end{cases}$$

$\bar{V}_{B_{3,2}B_{1,2}}$ - параллелен направлению (y — y);

$\bar{V}_{B_{3,2}B_4}$ - параллелен направлению (x — x).

Выбираем масштаб μ_v и решаем систему графическим методом планов скоростей.

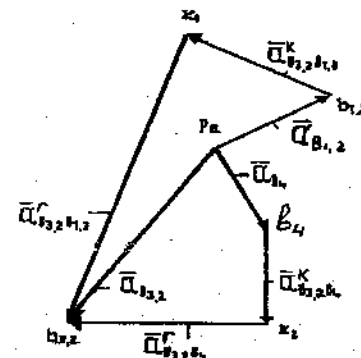
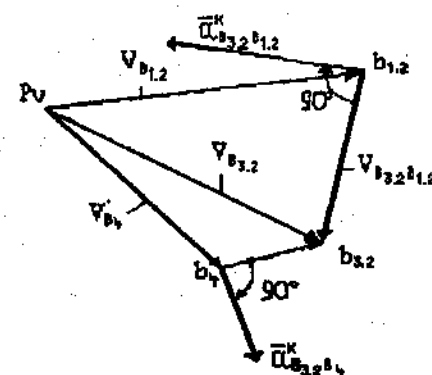
Определяем численные значения абсолютных и относительных скоростей:

$$V_{B_{3,2}} = (\overline{PVB_{2,3}}) \mu_v; V_{B_{3,2}B_{1,2}} = (\overline{B_{1,2}B_{3,2}}) \mu_v; V_{B_{3,2}B_4} = (\overline{B_4B_{3,2}}) \mu_v.$$

Рассматривая движение точки В соответственно со 2-м и 3-м звеньями, составим векторные уравнения движения для плана ускорений и проведем их анализ.

$$\begin{cases} \bar{a}_{B_{3,2}} = \bar{a}_{B_{1,2}} + \bar{a}^k_{B_{3,2}B_{1,2}} + \bar{a}^r_{B_{3,2}B_{1,2}} \\ \bar{a}_{B_{3,2}} = \bar{a}_{B_4} + \bar{a}^k_{B_{3,2}B_4} + \bar{a}^r_{B_{3,2}B_4} \end{cases}$$

Выбираем масштаб μ_a и строим план ускорений.



Затем определяем численные значения абсолютных и относительных ускорений.

$$a_{B_{3,2}} = (\overline{P_{AB_{3,2}}}) \mu_a; a_{B_{3,2}B_4} = (\overline{K_{2B_{3,2}}}) \mu_a; a_{B_{3,2}B_{1,2}} = (\overline{K_{1B_{3,2}}}) \mu_a.$$

2.6. Кинематика механизмов 1-го класса

Если механизм имеет одну степень подвижности, то перемещения, скорости и ускорения ведомых звеньев и точек механизма являются функциями перемещений, скоростей и ускорений одного из звеньев механизма, принятого за входное (ведущее).

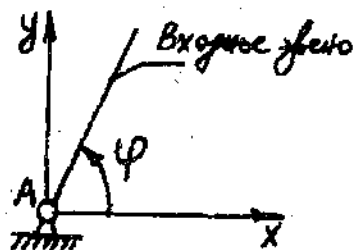
Если механизм обладает несколькими степенями подвижности, то перемещения, скорости и ускорения ведомых звеньев и точек механизма суть функции соответствующих перемещений, скоростей и ускорений звеньев механизма, принятых за

входные (ведущие). При этом число ведущих звеньев должно быть равно числу степеней подвижности механизма или, что тоже, числу обобщенных координат механизма.

Законы движения (ведущих) входных звеньев в дальнейшем будем называть функциями перемещений, скоростей или ускорений.

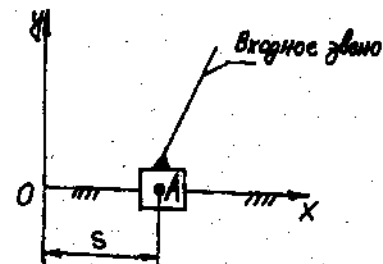
Функция перемещений может быть задана в аналитической форме в виде соответствующей функции, связывающей перемещения входного звена со временем.

Рассмотрим механизмы 1-го класса, у которых входные звенья входят во вращательную или поступательную пару со стойкой.



Здесь задается функция $\varphi = \varphi(t)$: φ - угол поворота входного звена относительно неподвижной системы координат XAY; t - время

В ряде случаев $S(t)$ и $\varphi(t)$ могут быть заданы графически в виде кривых (см. рисунок а и б).



Здесь задается функция $S=S(t)$: S - перемещение произвольно выбранной точки входного звена точки A относительно неподвижной системы координат связанной со стойкой; t - время

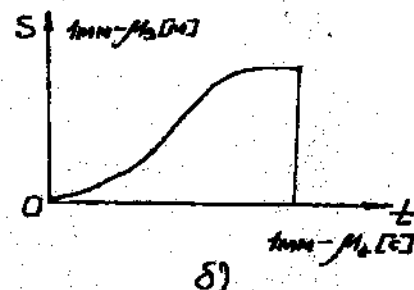
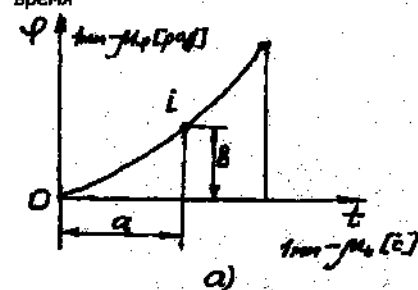
Пользуясь графиками, легко определить численное значение углов поворота или перемещений за любой выбранный отрезок времени.

Например: для i точки φ_i при $\varphi_0=0$, будет равно: $\varphi_i - \varphi_0 = \mu_\varphi \cdot b$,

где b - отрезок на графике в [мм]

Соответственно, время t , за которое ведущее звено повернулось на угол φ_i равно: $t_i - t_0 = \mu_t \cdot a$,

где a - отрезок на графике в [мм].



Инженерные задачи требуют задавать закон движения выходного звена в виде функций скоростей: $\omega = \omega(t)$ или $V = V(t)$.

Очевидно, что переход от функций скоростей к функциям перемещений может быть осуществлен путем вычисления интегралов:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t \omega(t) dt \quad \text{или} \quad S_i - S_0 = \int_{t_0}^t V(t) dt, \quad (2.35)$$

где φ_0 , S_0 , t_0 - соответственно угол, перемещение и время, соответствующие начальному положению входного звена.

Если же закон движения входного звена задан в виде функций ускорений: $\epsilon = \epsilon(t)$ или $a = a(t)$, то переход к функциям скоростей осуществляется путем вычисления интегралов:

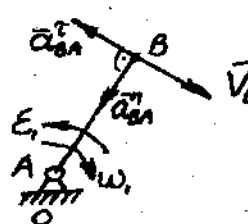
$$\omega_i - \omega_0 = \int_{t_0}^{t_i} \varepsilon(t) dt, \quad V_i - V_0 = \int_{t_0}^{t_i} \alpha(t) dt. \quad (2.36)$$

где ω_0 , V_0 , t_0 ... соответственно угловая скорость, линейная скорость и время, соответствующее начальному положению входного звена.

Следовательно, если закон движения входного звена задан функциями скоростей или ускорений и заданы начальные условия, то мы можем всегда перейти к функциям перемещений используя выражения (2.35) и (2.36).

Проведем анализ механизма 1-го класса входное звено которого входит во вращательную пару со стойкой с точки зрения неравномерного и равномерного движения.

При неравномерном движении имеем:



$$\varphi(t) \rightarrow \omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt}, \quad S_B = AB \cdot \varphi; \quad V_B = \omega_1 \cdot AB,$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

$$\frac{V_B^2}{AB} = \omega^2 AB = a_{BA}^n - \text{направлен по радиусу}$$

к полюсу вращения; характеризует изменение скорости по направлению,

$\varepsilon_1 AB = a_{BA}^\tau$ - направлен в сторону вектора углового ускорения,
 $\bar{\varepsilon}_1 \cdot (\bar{a}^\tau \perp \bar{a}^n)$ характеризует изменение скорости по величине.

При равномерном движении имеем:

$$\varphi = \varphi(t); \quad \omega_1 = \text{const}, \rightarrow \varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$$

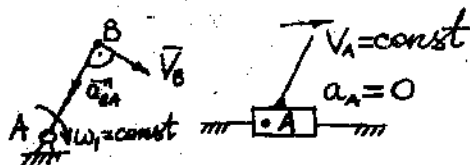
$$S_B = AB \cdot \varphi, \quad V_B = \omega_1 \cdot AB = \text{const}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$$

$$\bar{a}_{BA}^\tau = 0, \quad \varepsilon_1 = 0.$$

Последовательность операций при кинематическом анализе плоских механизмов 2-го класса графоаналитическим методом.

1. Проводится структурный анализ механизма, в результате которого:



- определяется класс механизма, позволяющий выбрать соответствующий метод анализа;

- записывается формула строения, определяющая строгую последовательность кинематического анализа.

2. Проводится геометрический синтез механизма, если в нем есть необходимость.

3. Строится необходимое число планов положений механизма и, если требуется, траекторий заданных точек.

4. Составляются системы векторных уравнений движений для каждой группы Ассур в соответствии с ее видом.

5. Решаются системы векторных уравнений движения графоаналитическими методами планов скоростей и планов ускорений.

- определяют численные значения абсолютных и относительных скоростей и ускорений заданных точек и звеньев механизма;

- определяют величины и направление ω и ε звеньев механизма;

- определяют радиусы кривизны, строят годографы и т.п.

2.7. Кинематическое исследование плоских рычажных механизмов аналитическим методом

2.7.1 Цели и задачи аналитической кинематики механизмов

В следствие неизбежных погрешностей графических и графоаналитических методов расчета во многих случаях точность их оказывается недостаточной для практического использования полученных результатов. В ряде случаев необходимо проводить анализ работы более детальный, чем тот, который может быть достигнут при графическом изображении результатов кинематического исследования. В связи с этим возникает необходимость в более точных методах (способах) кинематического исследования механизмов. Таким методом является аналитический метод исследования.

При аналитических методах кинематического расчета обычно устанавливают связь между перемещением ведущего звена и перемещениями, скоростями и ускорениями ведомых звеньев. В ряде случаев не-

обходимо знать уравнения траектории точки звена, совершающего сложное движение, или, как иначе говорят, уравнение шатунной кривой. Исследование кинематики механизмов при этом может быть выполнено с любой степенью точности, а также позволяет выявлять взаимосвязь кинематических параметров механизма с размерами его звеньев.

Применение ЭВМ резко повысило роль аналитических методов.

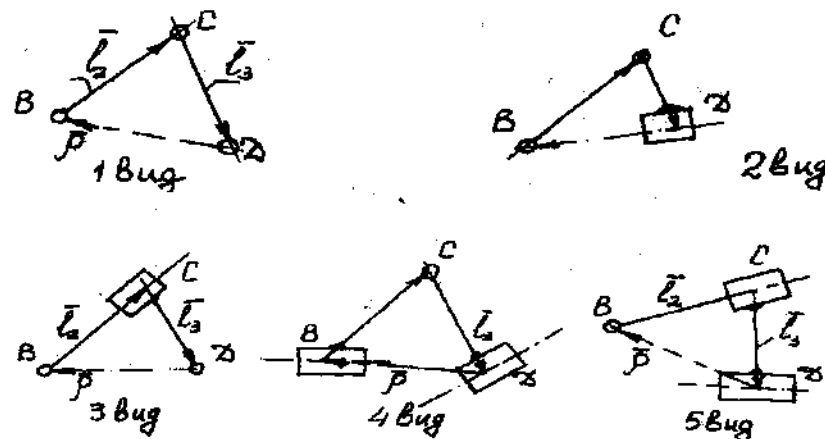
2.7.2 Аналитический метод кинематического исследования механизмов второго класса

В настоящее время известны две разновидности общего метода кинематического исследования механизмов аналитическими методами: метод преобразования координат Морозкина Ю.Ф. и методом замкнутого векторного контура А.А. Зинovieва. Метод преобразования координат изложен в учебнике: О.Н. Левитская, Н.И. Левитский "Курс ТММ" (М. 1978. С. 32, 33, 39-44). Мы будем изучать аналитическую кинематику, используя метод замкнутых векторных контуров.

В основе этих методов лежит понятие векторного контура, связанного с кинематической схемой механизма. Для манипуляторов, в основе которых лежат незамкнутые кинематические цепи, векторный контур будет также, как и цепь, не замкнут. В остальных случаях мы будем иметь дело с методом замкнутых векторных контуров.

Кинематическую схему любого механизма будем рассматривать как систему замкнутых многоугольников, сторонами которых служат звенья механизма. Если при этом стороны многоугольников рассматривать как векторы, есть возможность составлять уравнения замкнутости. Количество этих уравнений зависит от количества и класса структурных групп, входящих в механизм, т.е. полностью определяется формулой строения механизма. В этом проявляется неразрывная связь кинематического анализа со структурой.

Структурные группы 2-го класса в общем случае могут быть представлены замкнутым многоугольником.

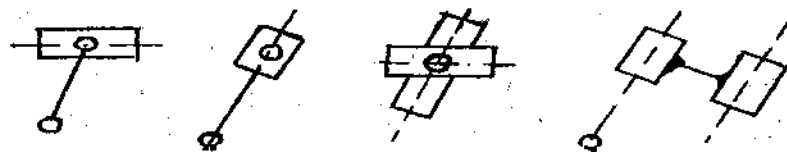


Условимся замыкающий группу вектор именовать вектор-параметром и обозначать p . Остальные векторы будем обозначать l_i , где i - номер звена. Направление вектора в принципе можно выбирать произвольно.

Условие замкнутости составляется так: выбирается направление обхода контура; вектор, совпадающий с этим направлением считается положительным, а противоположный — отрицательным. Для группы 2-го класса условие замкнутости при обходе контура по часовой стрелке запишется так:

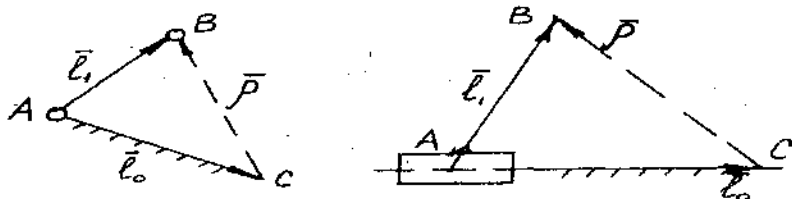
$$l_2 + l_3 + p = 0. \quad (2.37)$$

В реальных механизмах группы 2-го класса могут встречаться в таком виде:



В этом случае количество уравнений замкнутости для группы равно нулю.

Каждому механизму 1-го класса можно составить только одно уравнение замкнутости, определяющее взаимное расположение подвижного звена и стойки.



Вектор, принадлежащий стойке, будем обозначать l_0 .

При построении замкнутого контура механизма 1-го класса векторы l_1 и l_0 , принадлежащие подвижному звену и стойке, должны выходить из кинематической пары, соединяющей эти звенья.

Обобщая изложенное выше, можно сформулировать следующее:
для механизмов 2-го класса в общем случае число уравнений замкнутости равно сумме числа структурных групп и механизмов 1-го класса.

Последовательность операций при кинематическом анализе механизмов 2-го класса по методу замкнутого векторного контура

1. На основании кинематической схемы и формулы строения механизма определяем необходимое число уравнений замкнутости.
2. Выбираются направления векторов для каждого звена механизма и вектор-параметров, замыкающих структурные группы. Составляются уравнения замкнутости.
3. Выбирается система декартовых координат и по исходным данным начальное положение механизма. Задается угловой или линейный параметр перемещения входного звена, т.е. обобщенная координата механизма.
4. Условия замкнутости проектируются на оси координат и решается задача о положении звеньев и заданных точек механизма.
5. Дифференцируя уравнения замкнутости или их проекции на оси координат по обобщенной координате (угловой или линейной), определяющей положение входного (ведущего) звена, определяют аналоги скоростей заданных точек и звеньев механизма.
6. Повторное дифференцирование уравнений замкнутости по той же обобщенной координате входного (ведущего) звена позволяет определить аналоги ускорений заданных точек и звеньев механизма.

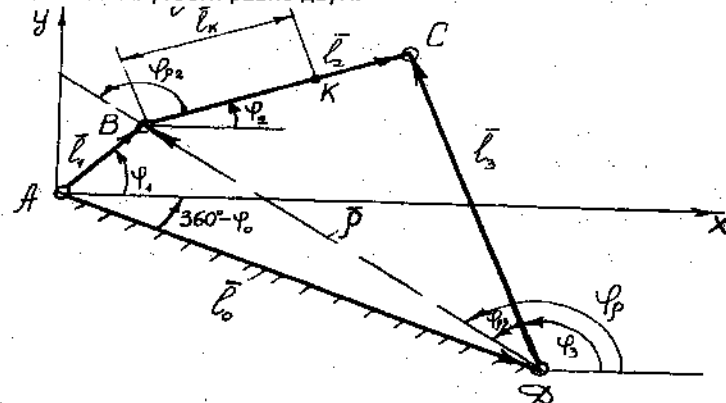
7. По вычисленным аналогам скоростей и ускорений определяются скорости и ускорения заданных точек и звеньев.

8. При необходимости решаются дополнительные задачи кинематического анализа: определение траекторий и радиусов их кривизны и т.д.

Рассмотрим решение задачи кинематического анализа на примере механизмов: кривошипно-коромыслового и кривошипно-кулисного.

2.7.3 Аналитическая кинематика кривошипно-коромыслового механизма

Механизм содержит одну структурную группу 2-го класса 1-го вида и один механизм 1-го класса. Следовательно, необходимое число уравнений замкнутости равно двум.



Выбираем направление векторов так, чтобы было удобно отсчитывать углы, определяющие их положение и составляем уравнения замкнутости:

$$\vec{l}_1 - \vec{\rho} - \vec{l}_0 = 0, \quad (2.38)$$

$$\vec{l}_2 - \vec{l}_3 + \vec{\rho} = 0. \quad (2.39)$$

Выбираем систему координат ХАУ и задаем углы, определяющие положение каждого вектора относительно положительного направления оси АХ.

Условимся считать углы положительными, если их отсчет будет идти против часовой стрелки.

Кроме того, зададим углы, определяющие положение вектор-параметра \bar{p} относительно векторов \bar{l}_2 и \bar{l}_3 - соответственно, φ_{p2} φ_{p3} .

Определим модуль \bar{p} и направление φ_p для вектор-параметра \bar{p} .

Для этого проектируем (2.38) на оси координат:

$$\text{ось АХ: } l_1 \cos \varphi_1 - l_0 \cos(360^\circ - \varphi_0) = p \cos \varphi_p, \quad (2.40)$$

$$\text{ось АУ: } l_1 \sin \varphi_1 - l_0 \sin(360^\circ - \varphi_0) = p \sin \varphi_p, \quad (2.41)$$

Делим (2.41) на (2.40) и находим φ_p :

$$\varphi_p = \arctg \frac{l_1 \sin \varphi_1 - l_0 \sin(360^\circ - \varphi_0)}{l_1 \cos \varphi_1 - l_0 \cos(360^\circ - \varphi_0)}, \quad (2.42)$$

возводим (2.40) и (2.41) в квадрат и суммируем, что позволяет после извлечения корня из результата найти:

$$p = \sqrt{[l_1 \cos \varphi_1 - l_0 \cos(360^\circ - \varphi_0)]^2 + [l_1 \sin \varphi_1 - l_0 \sin(360^\circ - \varphi_0)]^2}, \quad (2.43)$$

Из треугольника ВСД по теореме косинусов находим вспомогательные углы φ_{p2} и φ_{p3} ,

$$l_2^2 = p^2 + l_3^2 - 2pl_3 \cos \varphi_{p3}, \quad (2.44)$$

$$l_3^2 = p^2 + l_2^2 - 2pl_2 \cos(180^\circ - \varphi_{p2}), \quad (2.45)$$

откуда

$$\varphi_{p3} = \arccos \left(\frac{p^2 + l_3^2 - l_2^2}{2pl_3} \right), \quad (2.46)$$

$$\varphi_{p2} = 180^\circ - \arccos \left(\frac{p^2 + l_2^2 - l_3^2}{2pl_2} \right). \quad (2.47)$$

Теперь можно найти углы φ_2 и φ_3 :

$$\varphi_2 = \varphi_p - \varphi_{p2}, \quad (2.48)$$

$$\varphi_3 = \varphi_p - \varphi_{p3}. \quad (2.49)$$

Таким образом, задача о положениях звеньев решена.

Зная положение звеньев, можно найти положение любой точки механизма. Например, для точки К звена (2), расстояние которой от точки В задано вектором l_K , координаты таковы:

$$\begin{aligned} X_K &= l_1 \cos \varphi_1 + l_K \cos \varphi_2, \\ Y_K &= l_1 \sin \varphi_1 + l_K \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Для определения аналогов скоростей точек звеньев механизма исключаем из уравнений замкнутости (2.38) и (2.39) вектор-параметр \bar{p} и проектируем результат на ось координат.

$$\bar{l}_1 - \bar{l}_0 = -\bar{l}_2 + \bar{l}_3 \quad \text{или} \quad \bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_0 + \bar{l}_3, \quad (2.51)$$

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = l_0 \cos(360^\circ - \varphi_0) + l_3 \cos \varphi_3, \quad (2.52)$$

$$l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = l_0 \sin(360^\circ - \varphi_0) + l_3 \sin \varphi_3, \quad (2.53)$$

Дифференцируем (2.52) по φ_1

$$-l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \sin \varphi_2 = -l_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \sin \varphi_3. \quad (2.54)$$

Поворачиваем систему координат на угол φ_2 , что равносильно вычитанию угла φ_2 из всех углов соотношения (2.54).

При этом очевидно, что аналоги скоростей $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$ и $\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$ не зави-

сят от выбора системы координат, а следовательно, и ее поворота.

тогда из (2.54): $-l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -l_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \sin(\varphi_3 - \varphi_2)$,

$$\text{откуда} \quad \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \quad (2.55)$$

Аналогично, поворачивая систему координат на угол φ_3 , получим из (2.54), после дифференцирования по обобщенной координате φ_1 и преобразований:

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{-l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}. \quad (2.56)$$

Зная аналоги угловых скоростей звеньев, можно определить аналог линейной скорости любой точки механизма.

Так для произвольной точки К звена 2 дифференцированием по φ_1 выражений (2.50) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dX_K}{d\varphi_1} &= -l_1 \sin \varphi_1 - l_K \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \sin \varphi_2, \\ \frac{dY_K}{d\varphi_1} &= l_1 \cos \varphi_1 + l_K \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Для определения аналогов угловых ускорений звеньев 2 и 3 дифференцируем по φ_1 выражение (2.54):

$$\begin{aligned} -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} \sin \varphi_2 - l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \cos \varphi_2 = \\ = -l_3 \frac{d^2 \varphi_3}{d\varphi_1^2} \sin \varphi_3 - l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)^2 \cos \varphi_3. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Повторяя прием поворота системы координат на углы φ_2 и φ_3 и используя при этом соотношение (2.54), имеем:

$$\begin{aligned} -l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 = \\ = -l_3 \frac{d^2 \varphi_3}{d\varphi_1^2} \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) \\ - l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - l_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} \sin(\varphi_2 - \varphi_3) - \\ - l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) = l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Откуда определяем $\frac{d^2 \varphi_3}{d\varphi_1^2}$ и $\frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2}$, учитывая, что все параметры, входящие в (2.59) и (2.60), уже найдены ранее.

2.7.5. Аналитическая кинематика кривошипно-ползунного механизма

В данном механизме группа 2-го класса 2-го вида дана в упрощенной форме, следовательно, достаточно одного уравнения замкнутости:

$$\vec{l}_1 - \vec{l}_2 - \vec{X}_C - \vec{h} = 0, \quad (2.61)$$

или

$$\vec{l}_1 - \vec{l}_2 = \vec{X}_C + \vec{h}.$$

Проектируем (2.61) на оси координат:

$$l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2 = X_C, \quad (2.62)$$

$$l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 = h, \quad (2.63)$$

Угол φ_2 можно найти как из (2.62), так и из (2.63). В частности, из (2.63), имеем:

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{l_1 \sin \varphi_1 - h}{l_2}. \quad (2.64)$$

Зная φ_2 , можно определить положение любой точки звена 2. Так, для точки К имеем:

$$X_K = X_C - l_{CK} \cos(180^\circ - \varphi_2) = X_C + l_{CK} \cos \varphi_2,$$

$$Y_K = -h + l_{CK} \sin(180^\circ - \varphi_2) = -h + l_{CK} \sin \varphi_2.$$

Задача о положениях решена.

Для нахождения аналогов скоростей дифференцируем (2.62), (2.63) по обобщенной координате φ_1 :

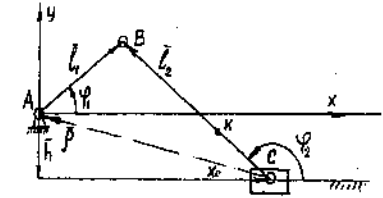
$$\frac{dX_C}{d\varphi_1} = -l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \sin \varphi_2, \quad (2.65)$$

$$0 = l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cos \varphi_2. \quad (2.66)$$

$$\text{Из (2.62) находим } \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{l_1 \cos \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2}. \quad (2.67)$$

Для нахождения остальных аналогов скоростей достаточно подставить в (2.65) найденное выражение (2.67) для $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$.

Для нахождения аналогов ускорений дифференцируем (2.65), (2.66):



$$\frac{d^2 X_C}{d\varphi_1^2} = -l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} \sin \varphi_2 + l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \cos \varphi_2, \quad (2.68)$$

$$0 = -l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} \cos \varphi_2 + l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \sin \varphi_2. \quad (2.69)$$

Из (2.68) находим аналог углового ускорения звена 2:

$$\frac{d^2 \varphi_2}{d\varphi_1^2} = \frac{l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right)^2 \sin \varphi_2 - l_1 \sin \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2}, \quad (2.70)$$

2.7.6. Аналитическая кинематика кривошипно-кулисного механизма

Как установлено ранее, при кинематическом анализе плоских механизмов по методу В.А.Зиновьева положение каждого звена определяется связанным с ним вектором так, что последовательность этих векторов образует один или несколько замкнутых контуров. Условия замкнутости векторных контуров в плоских механизмах дают достаточное число уравнений для определения неизвестных величин.

В этом механизме группа 2-го класса 3-го вида дана в упрощенном виде, следовательно, здесь достаточно одного уравнения замкнутости:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_0 = \vec{l}_3. \quad (2.71)$$

Проектируем это уравнение на оси координат соответственно на X и Y:

$$l_1 \cos \varphi_1 = l_3 \cos \varphi_3, \quad (2.72)$$

$$l_0 + l_1 \sin \varphi_1 = l_3 \sin \varphi_3. \quad (2.73)$$

Находим φ_3 , для этого делим (2.73) на (2.72)

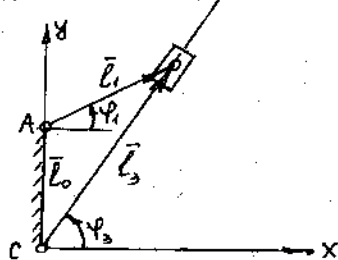
$$\varphi_3 = \arctg \frac{l_0 + l_1 \sin \varphi_1}{l_1 \cos \varphi_1}, \text{ если принять } \frac{l_0}{l_1} = \lambda;$$

$$\text{тогда } \varphi_3 = \arctg \frac{\lambda + \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1}.$$

При $\lambda > 1$ кулиса 3 совершает качательное движение.

При $\lambda < 1$ кулиса 3 вращается.

Задача о положениях механизма решена.



Для нахождения аналогов скоростей дифференцируем (2.72) и (2.73) по обобщенной координате φ_1 , учитывая, что \vec{l}_3 - величина переменная.

$$-l_1 \sin \varphi_1 = \frac{dl_3}{d\varphi_1} \cos \varphi_3 - l_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \sin \varphi_3, \quad (2.74)$$

$$l_1 \cos \varphi_1 = \frac{dl_3}{d\varphi_1} \sin \varphi_3 + l_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cos \varphi_3, \quad (2.75)$$

Поворачиваем систему координат на угол φ_3 , что равносильно вычитанию угла φ_3 из всех угловых координат соотношений (2.74) и (2.75). В результате будем иметь:

$$-l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) = \frac{dl_3}{d\varphi_1}, \quad (2.76)$$

$$l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) = l_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}, \quad (2.77)$$

$\frac{dl_3}{d\varphi_1}$ - аналог линейной относительной скорости в поступательной паре между камнем 2 и кулисой 3.

$l_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$ - аналог линейной скорости точки B_3 , принадлежащей кулисе.

Для нахождения аналогов ускорений дифференцируем (2.74) и (2.75) по φ_1 .

$$-l_1 \cos \varphi_1 = \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2} \cos \varphi_3 - \frac{dl_3}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \sin \varphi_3 - l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)^2 \cos \varphi_3 -$$

$$-l_3 \frac{d^2 \varphi_3}{d\varphi_1^2} \sin \varphi_3 - \frac{dl_3}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \sin \varphi_3.$$

Аналогично для (2.75) и окончательно будем иметь:

$$-l_1 \cos \varphi_1 = \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2} \cos \varphi_3 - 2 \frac{dl_3}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \sin \varphi_3 - \quad (2.78)$$

$$-l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)^2 \cos \varphi_3 - l_3 \frac{d^2 \varphi_3}{d\varphi_1^2} \sin \varphi_3$$

$$-l_1 \sin \varphi_1 = \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2} \sin \varphi_3 + 2 \frac{dl_3}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cos \varphi_3 - \quad (2.79)$$

$$-l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \right)^2 \sin \varphi_3 + l_3 \frac{d^2 \varphi_3}{d\varphi_1^2} \cos \varphi_3$$

Здесь $2 \frac{d l_3}{d \varphi_1} \frac{d \varphi_3}{d \varphi_1}$ - аналог ускорения Кориолиса;

$l_3 \left(\frac{d \varphi_3}{d \varphi_1} \right)^2$ - аналог нормального ускорения точки В₃ кулисы;

$l_3 \frac{d^2 \varphi_3}{d \varphi_1^2}$ - аналог тангенциального ускорения точки В₃ кулисы

Применяя поворот координат на угол φ_3 , получим из (2.78) и (2.79):

$$-l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) = \frac{d^2 l_3}{d \varphi_1^2} - l_3 \left(\frac{d \varphi_3}{d \varphi_1} \right)^2, \quad (2.80)$$

$$-l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) = 2 \frac{d l_3}{d \varphi_1} \frac{d \varphi_3}{d \varphi_1} + l_3 \frac{d^2 \varphi_3}{d \varphi_1^2}. \quad (2.81)$$

Из (2.80) определяется аналог относительного ускорения камня кулисы по кулисе:

$$\frac{d^2 l_3}{d \varphi_1^2} = -l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + l_3 \left(\frac{d \varphi_3}{d \varphi_1} \right)^2. \quad (2.82)$$

Из (2.81) определяется аналог углового ускорения кулисы.

$$\frac{d^2 \varphi_3}{d \varphi_1^2} = -\frac{l_1}{l_3} \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - 2 \frac{d l_3}{d \varphi_1} \frac{d \varphi_3}{d \varphi_1} \frac{1}{l_3}. \quad (2.83)$$

Таким образом, в аналитических методах автоматически используется разложение движения на переносное и относительное.

При необходимости, скорости и ускорения звеньев и их точек могут быть всегда выражены через соответствующие аналоги скоростей и ускорений и угловые скорость и ускорение ведущего звена механизма по известным зависимостям:

$$\omega_k = \omega_1 \frac{d \varphi_k}{d \varphi_1} \quad \text{и} \quad \varepsilon_k = \omega_1^2 \frac{d^2 \varphi_k}{d \varphi_1^2} + \varepsilon_1 \frac{d \varphi_k}{d \varphi_1}.$$

Таким образом, мы рассмотрели простейшие примеры механизмов 2-го класса с одной структурной группой. Но даже в этих случаях аналитические выражения получены нами не в явной форме, а в форме алгоритмов, то есть последовательности операций, ведущих к поставленной цели.

Легко представить, насколько усложняется алгоритм для плоских механизмов более высоких классов, не говоря уже о механизмах пространственных, в которых положения звеньев определяются не одним, а тремя углами с осями координат, а векторные условия замкнутости имеют многозначные решения. (С применением анализа простейшего пространственного механизма можно познакомиться в изданном в РИСиМе курсе лекций "Структурный и кинематический анализ механизмов", разработанном кафедрой ТММ).

Следовательно, в случае сложных механизмов необходима современная вычислительная техника с процедурой промежуточной операции разработки программ расчета и их отладки, что требует значительных затрат времени.

Очевиден вывод: аналитические методы кинематического исследования следует применять на практике в случаях проектирования однотипных механизмов. В этом случае конечный итог окупает все предварительные затраты.

Что касается непосредственно техники решения задач кинематического анализа аналитическими методами, то отметим следующее:

Если направление вращения входного звена противоположно выбранному, то ω_1 отрицательно, что необходимо учесть при переходе от аналогов к скоростям. Это показывает, что введение аналогов скоростей и ускорений позволяет абстрагироваться от действительного закона движения входных звеньев, в чем и состоит глубокий смысл их введения.

Можно сказать, что аналоги являются внутренними характеристиками механизма, так как действительные законы движения механизма, определяются всей совокупностью механизмов машины, а также силовыми и моментными воздействиями на них.

Направление углов, определяющих положение звеньев, можно принимать произвольно; так же, как и ось, от которой они отчитываются. Правда, в этом случае возникают затруднения с расшифровкой результатов расчета, полученных с ЭВМ, а так же с применением метода поворота системы координат, поскольку могут не исчезать некоторые слагаемые.

3. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

3.1. Цели, задачи и методы силового анализа

Основной целью силового анализа механизмов является решение 1-й задачи динамики для определения всех возможных усилий, действующих на звенья механизма в процессе его работы при заданном законе движения.

Достижение указанной цели осуществляется при решении следующих задач:

1. Определение усилий (давлений) во всех кинематических парах механизма по заданным значениям движущих сил и сил сопротивления.

2. Определение мощности приводных двигателей для рабочих машин и наоборот: мощности нагрузки для машин-двигателей.

В зависимости от требуемой точности, задачи силового анализа механизмов могут быть решены следующими методами:

1. **Статистический метод.** В расчете учитываются только статические усилия, которые постоянны по величине, направлению и точке приложения. Силы инерции не учитываются. Применяют статический метод для тихоходных машин, у которых динамические инерционные усилия очень малы и их можно не учитывать; решение первой задачи динамики проводится путем составления и решения уравнений статики.

2. **Динамический метод.** В расчете применяются только динамические усилия, переменные по величине, направлению и точке приложения, а статическими усилиями пренебрегают. Используют в основном для быстроходных машин.

3. **Кинетостатический метод.** В основу этого метода положен принцип Даламбера, который применительно к рассматриваемому вопросу формулируется так: *звено механизма можно рассматривать находящимся в равновесии, если ко всем силам, действующим на него, условно добавить силы инерции.*

Таким образом, задача динамики сводится к задаче статики, что значительно упрощает ее решение.

Сущность кинетостатического метода силового расчета механизмов состоит в том, что к звеньям механизма прикладываются найденные по величине и направлению силы инерции, моменты пар сил инерции,

активные силы; составляются уравнения равновесия, с помощью которых определяются неизвестные реакции в кинематических парах. Он широко применяется в инженерной практике.

4. **Уточненный кинетостатический метод.** Учитывает еще и силы трения в кинематических парах.

5. **Экспериментальный метод.** Применяется для проверки моделей механизмов и машин, а также если невозможно использовать предыдущие методы.

3.2. Условие статической определимости плоской кинематической цепи

При кинетостатическом расчете механизмов неизвестные реакции кинематических пар определяются с помощью уравнений статики. Известно, что реакция считается определенной, если известны ее величина, направление и точка приложения.

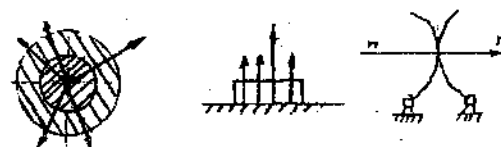
Условие статической определимости кинематической цепи состоит в том, что соотношение между числом звеньев и числом кинематических пар должно быть таким, чтобы все неизвестные параметры, реакций могли быть найдены с помощью уравнений статики, составленных для этих звеньев.

Для каждого звена плоской кинематической цепи как материального тела можно составить три уравнения статики, а для n звеньев – $3n$ уравнений.

Поскольку высшие кинематические пары могут быть заменены всегда на низшие, будем полагать, что у нас в плоской кинематической цепи имеются только вращательные и поступательные пары, т.е. низшие.

Известно, что сила взаимодействия двух тел нормальна к поверхности их соприкосновения. Во вращательной паре сила взаимодействия валика и втулки направлена радиально и проходит через центр шарнира. Поскольку силу можно переносить по линии ее действия, во вращательной паре центр шарнира условно считают точкой приложения реакции; два других параметра – величина и направление реакции – не известны.

В поступательной паре заранее известна линия действия реакции, перпендикулярно плоскости соприкос-



новения звеньев; два других параметра – величина и точка приложения – не известны.

Таким образом, в каждой низшей кинематической паре (паре 5 класса) неизвестны два параметра реакций.

Если число таких пар 5-го класса в рассматриваемой кинематической цепи P_5 , то общее число неизвестных параметров будет $2P_5$.

Следовательно, условие статической определимости плоской кинематической цепи будет иметь вид:

$$3n = 2P_5, \text{ или } P_5 = 3/2n$$

Полученному соотношению удовлетворяет число звеньев и число кинематических пар в структурных группах Ассура. **Значит, структурные группы Ассура статически определимы.**

3.3. Определение сил инерции звеньев механизмов

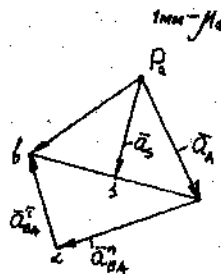
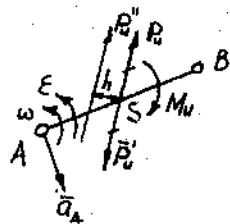
Силы инерции, действующие на звено механизма, могут быть приведены к силе инерции (главному вектору) и моменту пары сил инерции (главному моменту):

$$\bar{P}_H = -m\bar{a}_S, H,$$

$$M_H = -J_S \varepsilon, H \cdot m,$$

где m – масса звена; \bar{a}_S – ускорение центра масс; $J_S = mr^2$ – момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр тяжести; r – радиус инерции; ε – ускорение угловое.

Звено совершает сложное плоскопараллельное движение



Дано: $\omega, \varepsilon, J_S, m, \mu$

Строим план ускорений для звена AB согласно уравнению:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t,$$

$$a_{BA}^n = \omega^2 l_{AB}, \frac{m}{C^2},$$

$$a_{BA}^t = \varepsilon \cdot l_{AB}, \frac{m}{C^2}.$$

Сила инерции $\bar{P}_H = -m\bar{a}_S = -m(\bar{P}_a S) \mu_a, H.$

Момент пары сил инерции $M_H = -J_S \varepsilon = -J_S \frac{a_{BA}^t}{l_{BA}} = -J_S \frac{(\alpha B) \mu_a}{AB \cdot \mu_l}, Hm$

Силу P_u и момент M_u можно заменить одной силой, которая равна P_u , но смещена параллельно данной силе на плечо h , определяемое из условия:

$$h = \frac{M_u}{P_u}.$$

Здесь момент M_u заменен парой сил P'_u и P''_u , причем $P_u = P'_u = P''_u$.

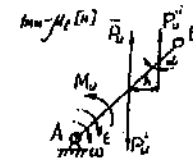
Звено вращается вокруг оси A, не проходящей через центр тяжести

Дано: $\omega, \varepsilon, J_S, m, \mu$

По уравнению

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^t,$$

строим в масштабе μ_a план ускорений.



Определяем:

$$P_H = -ma_S = -m(\bar{P}_a S) \mu_a, [H];$$

$$M_H = -J_S \varepsilon = -J_S \frac{a_{BA}^t}{l_{BA}} = -J_S \frac{(\lambda B) \mu_a}{AB \cdot \mu_c}, Hm.$$

Силу P_u и момент M_u заменяем одной силой ($P_u = P'_u = P''_u$), которая смещена параллельно данной P_u на плечо $h = \frac{M_u}{P_u}$ и приложена к точке

К звена. Эта точка называется центром качания.

Имеем: $l_{AK} = l_{AS} + l_{SK}$

$$l_{SK} = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{M_H}{P_H \sin \alpha} = \frac{-J_S \varepsilon}{-ma_S \sin \alpha} = \frac{mr^2 \varepsilon}{ma_S \sin \alpha} = \frac{r^2 \varepsilon}{a_S \sin \alpha};$$

$J_S = mr^2$ – момент инерции звена относительно его центра тяжести S; r – радиус инерции.

Из плана ускорений имеем: $a_S \sin \alpha = \bar{a}_{SA}^i$. Кроме этого $\varepsilon = \frac{\bar{a}_{SA}^i}{l_{AS}}$.

$$\text{Тогда } I_{SK} = \frac{\rho^2 \varepsilon}{a_S \sin \alpha} = \frac{\rho^2 \bar{a}_{SA}^i}{\bar{a}_{SA}^i l_{AS}} = \frac{\rho^2}{l_{AS}}.$$

Следовательно, $I_{AK} = I_{AS} + \frac{\rho^2}{l_{AS}}$, или с учетом $\rho^2 = \frac{J_S}{m}$,

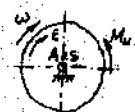
$$I_{AK} = I_{AS} + \frac{J_S}{m \cdot l_{AS}}.$$

Из полученного соотношения следует:

1. Оба слагаемых правой части постоянны, не зависят от положения звена в процессе его движения. Значит, равнодействующая сила инерции приложена к постоянной точке: а именно центру качения.

2. Второе слагаемое уравнения положительно. Поэтому равнодействующая P_u расположена от оси вращения дальше, чем центр тяжести, т.е. точка S.

Звено вращается вокруг оси A, проходящей через центр тяжести S



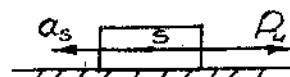
Имеем $P_u = -ma_S = 0$, так как $a_S = 0$.

$$M_u = -J_S \varepsilon, [Hm].$$

При равномерном вращении $\omega_1 = const$, $\varepsilon = 0$ и

$$M_u = 0.$$

Звено совершает поступательное движение



$$P_u = -ma_S;$$

$$M_u = -J_S \varepsilon = 0, \text{ так как } \varepsilon = 0.$$

При равномерном движении: $V_S = const$, $a_S = 0$ и $P_u = 0$.

3.4. Графоаналитическая кинематика структурных групп

2-го класса (расчет групп 1, 2, 3, 4 и 5-го видов)

При силовом расчете групп 2-го класса должны быть известны: массы звеньев и моменты инерции звеньев, внешние силы и моменты пар сил, приложенные к звеньям. Группа должна быть вычерчена в масштабе μ и для этого положения группы построены планы скоростей и ускорений. На основе плана ускорений P_a определены главный вектор сил инерции \bar{P}_u и главный вектор – момент пар сил инерции \bar{M}_u .

Порядок силового расчета является обратным порядку кинематического исследования, т.е. силовой расчет начинается с последней, считая от ведущего звена, присоединенной группы и кончается силовым расчетом ведущего звена.

Основной задачей силового расчета является определение реакций (давлений) в кинематических парах. Силы трения не учитываются.

3.4.1. Силовой расчет группы 2 кл. 1 вида

Дано:

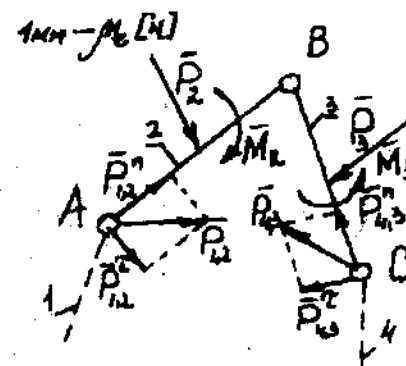
$\bar{P}_2, (\bar{P}_3)$ – результирующий вектор всех внешних сил, включая и силы инерции, приложенных ко 2-му звену (к 3-му звену).

$\bar{M}_2, (\bar{M}_3)$ – результирующий момент всех внешних сил, включая и моменты пар сил инерции, приложенных ко 2-му звену (к 3-му звену).

$\bar{P}_{1,2}$ – реакция (давление) со стороны отсоединенного первого звена на 2-е звено.

$\bar{P}_{4,3}$ – реакция (давление) со стороны отсоединенного 4-го звена на 3-е звено.

$\bar{P}_{1,2}$ и $\bar{P}_{4,3}$ – внешние силы (они известны только по точке приложения)



Найти.

$\bar{P}_{1,2}; \bar{P}_{4,3}; \bar{P}_{2,3} \equiv (\bar{P}_{3,2})$, т.е. реакции в кинематических парах А, В и С.

В состав внешних сил, приложенных к звеньям группы, входят и силы инерции, следовательно, в соответствии с принципом Даламбера группу можно рассматривать находящейся в равновесии: в состоянии равномерного прямолинейного движения или в состоянии покоя.

Условие равновесия группы запишется:

$$\bar{P}_{1,2} + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{4,3} = 0. \quad (3.1)$$

Реакции $\bar{P}_{1,2}$ и $\bar{P}_{4,3}$ неизвестны по величине и направлению.

Разложим их на соответствующие составляющие, как показано на схеме:

$$\bar{P}_{1,2} = \bar{P}_{1,2}^n + \bar{P}_{1,2}^t, \quad (3.2)$$

$$\bar{P}_{4,3} = \bar{P}_{4,3}^n + \bar{P}_{4,3}^t. \quad (3.3)$$

Рассмотрим равновесие звеньев 2 и 3 в отдельности:

Звено 2:

$$\bar{P}_{1,2}^n + \bar{P}_{1,2}^t + \bar{P}_2 + \bar{P}_{3,2} = 0, \quad (3.4)$$

Звено 3:

$$\bar{P}_{4,3}^n + \bar{P}_{3,4}^t + \bar{P}_3 + \bar{P}_{2,3} = 0. \quad (3.5)$$

Для определения $\bar{P}_{1,2}^t$ и $\bar{P}_{3,4}^t$ запишем сумму моментов, приложенных соответственно ко 2-му и 3-му звену относительно шарнира В:

$$\bar{P}_{1,2}^t l_{AB} + M_B(\bar{P}_2) + M_2 = 0, \quad (3.6)$$

$$\bar{P}_{1,2}^t = -\frac{M_B(\bar{P}_2) + M_2}{l_{AB}}.$$

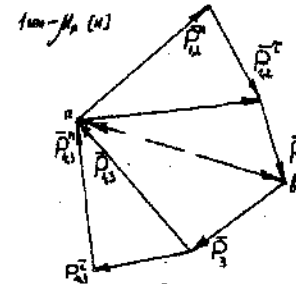
Аналогично найдем:

$$\bar{P}_{3,4}^t = -\frac{M_B(\bar{P}_3) + M_3}{l_{BC}}. \quad (3.7)$$

Знак (направление) $\bar{P}_{1,2}^t$ и $\bar{P}_{3,4}^t$ определяется знаком правой части уравнений (3.6) и (3.7).

Анализ уравнения (3.1), переписанного с учетом (3.2) и (3.3), показывает, что составляющие $\bar{P}_{1,2}^n$ и $\bar{P}_{4,3}^n$ можно определить графически из плана сил, построенного по уравнению (3.1,а) в масштабе μ_p .

$$\bar{P}_{1,2}^n + \bar{P}_{1,2}^t + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{4,3}^n + \bar{P}_{4,3}^t = 0 \quad (3.1,а)$$



Используя план сил и уравнение (3.4), находим $\bar{P}_{3,2}$.

Используя (3.5) и план сил, находим $\bar{P}_{2,3}$.

Используя план сил и μ_p имеем:

$$P_{1,2} = \bar{P}_{1,2} \cdot \mu_p,$$

$$P_{4,3} = \bar{P}_{4,3} \cdot \mu_p,$$

$$P_{2,3}(\bar{P}_{3,2}) = (ab) \cdot \mu_p.$$

3.4.2. Силовой расчет группы 2-го класса 2 вида

Дано: $\bar{P}_2; \bar{P}_3; \bar{M}_2; \bar{M}_3$.

Найти:

$\bar{P}_{1,2}; \bar{P}_{4,3}; \bar{P}_{2,3}(\bar{P}_{3,2}); h_K$.

Составим условие равновесия группы:

$$\bar{P}_{1,2} + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{4,3} = 0, \quad (3.8)$$

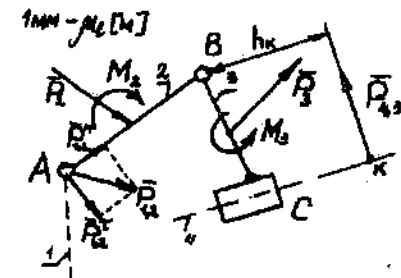
разложим $\bar{P}_{1,2}$ на $\bar{P}_{1,2}^t$ и $\bar{P}_{1,2}^n$,

$$\bar{P}_{1,2}^n + \bar{P}_{1,2}^t + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{4,3} = 0, \quad (3.8,а)$$

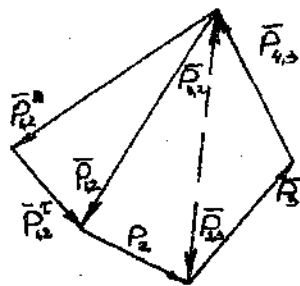
$\bar{P}_{1,2}^t$ - определяем из уравнения моментов всех сил, приложенных к звену 2 относительно точки В.

$$P_{1,2}^t l_{AB} + M_B(\bar{P}_2) + M_2 = 0, \quad (3.9)$$

$$P_{1,2}^t = -\frac{M_B(\bar{P}_2) + M_2}{l_{AB}},$$



$\bar{P}_{1,2}^n$ и $P_{4,3}$ — определяем из плана сил, который строим в выбранном масштабе μ_p по уравнению (3.8,а).



Запишем условия равновесия для 2-го и 3-го звена:

$$\text{Звено 2: } \bar{P}_{1,2} + \bar{P}_2 + \bar{P}_{3,2} = 0, \quad (3.10)$$

$$\text{Звено 3: } \bar{P}_3 + \bar{P}_{4,3} + \bar{P}_{2,3} = 0. \quad (3.11)$$

Используя план сил группы и уравнения (3.10) и (3.11), определяем $P_{3,2} = (P_{2,3})$.

Для определения точки приложения реакции $P_{4,3}$ составим сумму моментов, действующих на 3-е звено относительно точки В:

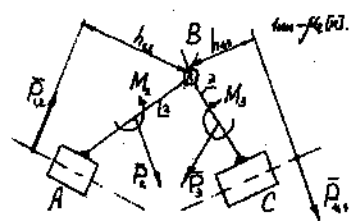
$$P_{4,3} h_K + M_3 + M_B(\bar{P}_3) = 0,$$

откуда

$$h_K = - \left[\frac{M_3 + M_B(\bar{P}_3)}{P_{4,3}} \right], \text{ м.} \quad (3.12)$$

Если после подстановки данных и вычисления окажется плечо h_K со знаком "плюс", это значит, что действительное расположение этого плеча совпадает с предположительно выбранным; если "минус", то плечо h_K расположено противоположно предположительно выбранному.

3.4.4. Силовой расчет группы 2-го класса 4 вида



Дано: $\bar{P}_2; \bar{P}_3; \bar{M}_2; \bar{M}_3$.

Найти: $\bar{P}_{1,2}; \bar{P}_{4,3}; \bar{P}_{2,3}(\bar{P}_{3,2}); h_{1,2}; h_{4,3}$.

Составим условия равновесия группы и звеньев:

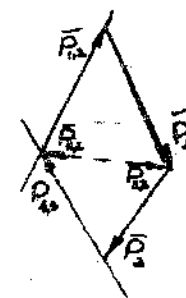
$$\bar{P}_{1,2} + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{4,3} = 0,$$

$$\text{Для звена 2: } \bar{P}_{1,2} + \bar{P}_2 + \bar{P}_{3,2} = 0, \quad (3.13)$$

$$\text{Для звена 3: } \bar{P}_{4,3} + \bar{P}_3 + \bar{P}_{2,3} = 0. \quad (3.14)$$

Строим план сил для группы в масштабе μ_p по уравнению (3.12)

Реакцию в шарнире В находим из плана сил по уравнениям (3.13) и (3.14), плечи $h_{1,2}$ и $h_{4,3}$ находим из условия равновесия звеньев 2 и 3 в форме моментов относительно точки В (см. (3.12) для гр.2кл.2 вида).



3.4.5. Силовой расчет группы 2-го класса 5 вида

Дано: $\bar{P}_2; \bar{P}_3; \bar{M}_2; \bar{M}_3$.

Найти: $\bar{P}_{1,2}; \bar{P}_{4,3}; \bar{P}_{2,3}(\bar{P}_{3,2}); h_K; h_m$.

Составим условия равновесия группы и звеньев:

$$\bar{P}_{1,2} + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{4,3} = 0, \quad (3.15)$$

$$\text{Для звена 2: } \bar{P}_{1,2} + \bar{P}_2 + \bar{P}_{3,2} = 0, \quad (3.16)$$

$$\text{Для звена 3: } \bar{P}_{4,3} + \bar{P}_3 + \bar{P}_{2,3} = 0, \quad (3.17)$$

Строим план сил по уравнению (3.17) и находим $P_{4,3}$ и $P_{2,3}$.

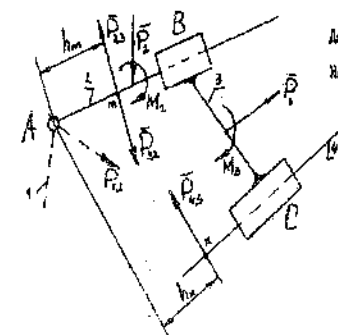
Далее можно использовать условие равновесия (3.15) и построить на имеющемся плане сил силы P_2 и $P_{1,2}$ как замыкающую многоугольник сил:

$$P_{4,3} = \bar{P}_{4,3} \cdot \mu_p; P_{1,2} = \bar{P}_{1,2} \cdot \mu_p;$$

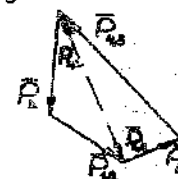
$$P_{2,3} = (\bar{P}_{2,3}) = \bar{P}_{2,3} \cdot \mu_p.$$

Точку приложения $P_{4,3}$, т.е. плечо h_K определим из уравнения моментов всех сил, приложенных к группе относительно точки А.

Точку приложения $P_{2,3}$ ($P_{3,2}$) определим из уравнения моментов всех сил, приложенных к звену 2 относительно точки А.



Сила $P_{2,3}$ [Н].



3.4.6. Силовой расчет группы 2-го класса 3 вида

1 мк - 1 мс

Дано: $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{M}_2, \bar{M}_3$.

Соединяем А и С линией АС.

Найти: $\bar{P}_{1,2}, \bar{P}_{4,3}, \bar{P}_{3,2}(\bar{P}_{2,3})$.

Разложим искомую реакцию $\bar{P}_{1,2}$ на

$\bar{P}_{1,2}^n$ и $\bar{P}_{1,2}^t$. Причем соединив А и С,

$\bar{P}_{1,2}^n$ направляем по АС, а $\bar{P}_{1,2}^t \perp \text{АС}$.

Условие равновесия группы позволяет из уравнения моментов

всех сил и моментов относительно точки С найти $\bar{P}_{1,2}^t$:

$$\bar{P}_{1,2}^t / \text{АС} + M_C(\bar{P}_2) + M_2 + M_3 + M_C(\bar{P}_3) = 0,$$

$$\bar{P}_{1,2}^t = - \frac{M_C(\bar{P}_2) + M_2 + M_3 + M_C(\bar{P}_3)}{l_{AC}}. \quad (3.18)$$

Составим условие равновесия звена 2 в виде векторного уравнения.

$$\bar{P}_{1,2}^n + \bar{P}_{1,2}^t + \bar{P}_2 + \bar{P}_{3,2} = 0, \quad (3.19)$$

Выбираем масштаб μ_p и строим план сил по уравнению (3.19):

Из полученного плана сил имеем:

$$P_{1,2} = \bar{P}_{1,2} \cdot \mu_p; P_{3,2} = \bar{P}_{3,2} \cdot \mu_p.$$

Точку приложения реакции $P_{3,2}$, т.е. h_m , находим из условия равновесия звена 2, взяв сумму моментов всех сил относительно точки А:

$$M_A(\bar{P}_2) + M_2 + P_{3,2} h_m = 0,$$

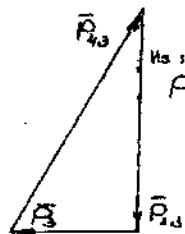
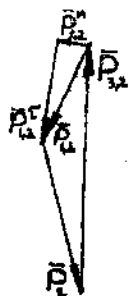
$$h_m = - \frac{M_A(\bar{P}_2) + M_2}{P_{3,2}}. \quad (3.20)$$

Далее составляем условие равновесия звена 3:

$$\bar{P}_{2,3} + \bar{P}_3 + \bar{P}_{4,3} = 0.$$

Строим план сил учитывая, что $\bar{P}_{2,3} = -\bar{P}_{3,2}$.

Из плана сил находим: $P_{4,3} = \bar{P}_{4,3} \cdot \mu_p$



3.5. Силовой расчет механизмов 1-го класса.

Понятие уравновешивающих силы и момента

Входное звено образует со станиной вращательную или поступательную пару 5 класса (рис. 3.1).

В результате силового расчета структурных групп, выполняемого в последовательности обратной формуле строения механизма, определяется реакция действующая со стороны входного звена 1 на звено 2, т.е. давление в кинематической паре между 1 и 2 звеньями.

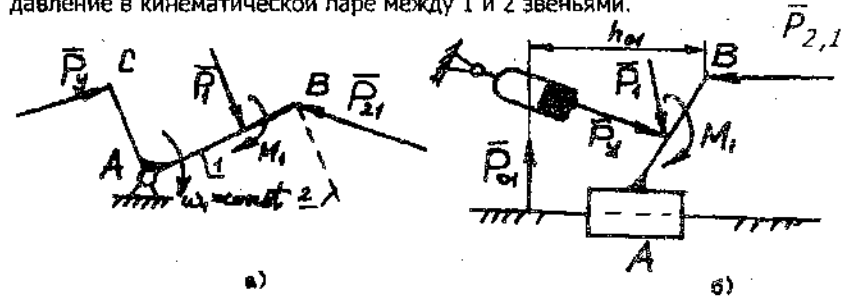


Рис. 3.1. Механизмы 1-го класса

Задачей силового исследования механизма 1-го класса (см. схему) является определение неизвестных параметров реакций в кинематической паре, связывающей звено (1) со стойкой. В обоих случаях мы имеем два неизвестных параметра: величину и направление (а); величину и точку приложения (б).

Механизм 1-го класса под действием всех внешних сил, включая силы инерции, должен находиться в равновесии, т.е. должно выполняться соотношение: $3n = 2P_5$. Мы, однако, имеем: $3 \cdot 1 \neq 2 \cdot 1$!

*В отличие от структурных групп, эта система статически неопределима, если ее рассматривать вне связи с машиной.

Для равновесия системы сил, приложенных к механизму 1-го класса, необходимо ввести еще одну неизвестную: либо момент к звену 1, либо силу к заданной точке, действующую в заданном направлении со стороны машины.

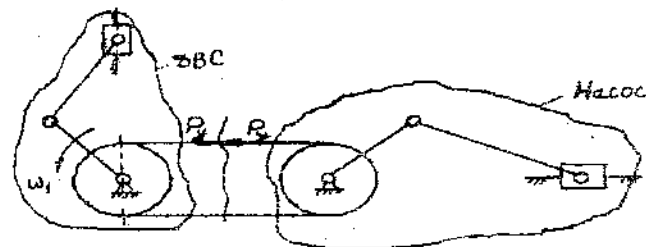
Эти сила и момент носят название уравновешивающей силы (P_y) и уравновешивающего момента (M_y). Физически (P_y) или (M_y) указывает:

Для рабочей машины, ту силу или момент, которые должен развить двигатель для преодоления всех сил и моментов пар сил, действующих в механизме.

Для двигателя: ту силу или момент, которые могут быть приложены со стороны рабочей машины так, чтобы двигатель не остановился.

Мощность, развиваемая P_y и M_y , равна мощности всех сил и моментов пар сил, действующих в механизме.

Рассмотрим соединение двигателя внутреннего сгорания (ДВС) с насосом.

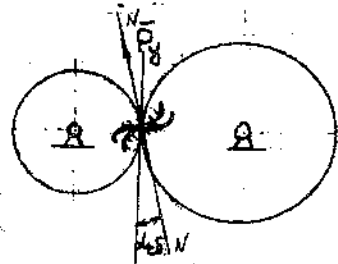


Только с учетом P_y и M_y механизм 1-го класса можно рассматривать находящимся в равновесии.

Конструкция привода входного звена решает вопрос о том, что необходимо приложить (P_y) или (M_y) для уравнивания сил, приложенных к механизму 1-го класса.

Если привод входного звена осуществляется ременной или цепной передачей, то P_y направлено по ведущей ветви передачи и приложено в точке касания этой ветви со шкивом.

Если входное звено механизма приводится зубчатой передачей, то P_y приложено в точке контакта (полосе) зубцов и направлено по нормали к ним.



Следовательно, для P_y - всегда известны точка приложения и направление, они определяются конструкцией привода входного звена.

Если привод входного звена осуществляется муфтой, то возникает M_y - уравнивающий момент (известный только по величине).

С учетом неизвестного P_y механизм 1-го класса становится статически определимым.

Рассмотрим схему а (рис.3.1), когда входное звено совершает вращательное движение.

1) Из условия равновесия звена 1 по уравнению моментов всех сил, действующих на звено определим P_y .

$$M_A(\bar{P}_1) + M_1 + M_A(\bar{P}_{2,1}) + P_y h_y = 0 \rightarrow \bar{P}_y$$

2) По уравнению равновесия звена 1 строим в μ_p план сил, в котором P_{01} - будет замыкающим вектором.

$$\bar{P}_{01} + \bar{P}_1 + \bar{P}_y + \bar{P}_{21} = 0$$

$$P_{01} = \bar{P}_{01} \cdot \mu_p$$

Рассмотрим схему б (рис.3.1), когда входное звено совершает поступательное движение.

1) по условию равновесия звена 1:

$$P_{01} + P_y + P_1 + P_{21} = 0$$

строим в масштабе μ_p план сил, из которого определим реакцию P_{01} и уравнивающую силу P_y .

Из плана сил определим:

$$P_{01} = \bar{P}_{01} \cdot \mu_p$$

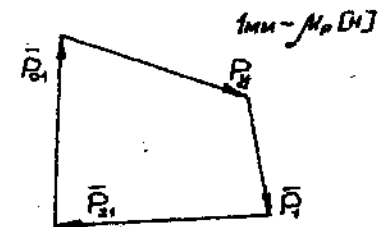
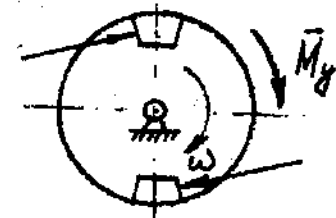
$$P_y = \bar{P}_y \cdot \mu_p$$

2) по условию равновесия звена 1 из уравнения моментов всех сил относительно точки В найдем точку приложения P_{01} , т.е. h_{01} :

$$P_{01} h_{01} + M_B(\bar{P}_1) + M_1 + M_B(\bar{P}_y) = 0, \rightarrow h_{01},$$

$$P_y V_y \cos(\bar{P} \cdot \bar{V}_y) = N,$$

$$N = M_y \omega_1 = P_y l_{AB} \omega_1 = P_y V_B,$$



где N — мгновенная мощность, развиваемая двигателем в данный момент для данного положения и необходимая для привода механизма.

Таким образом, полученные значения мощности для механизма за цикл его работы позволяют после усреднения проводить подбор мощности двигателя.

Определенные в кинематических парах реакции являются исходными для выбора подшипников в этих парах.

3.6. Определение уравновешивающей силы механизма методом рычага Н.Е. Жуковского

Определение P_y или M_y по методу планов сил академика Бруевича И.Г. представляется трудоемким, так как связано с предварительным определением реакций (давлений) в кинематических парах механизма.

В инженерной практике часто возникает необходимость в определении P_y или M_y без определения реакций в кинематических парах, например, для выбора гидроцилиндра и т.п. В таких случаях применяют графоаналитический метод рычага Н.Е. Жуковского, разработанный им в 1912 г. В основе этого метода лежит известный в теоретической механике принцип возможных перемещений, записываемый в виде:

$$\sum_{i=1}^k \delta A p_i = \sum_{i=1}^k P_i \delta r_i = 0. \quad (3.21)$$

Так как скорости точек системы в действительном движении имеют направление dr_i , а при стационарных связях действительное перемещение является одним из возможных, то применительно к нашей задаче можно дать частную формулировку принципа возможных перемещений, заменив возможные перемещения δr_i на "возможные скорости" V_i — величины, пропорциональные действительным скоростям $\frac{dr_i}{dt}$. К нашему случаю этот принцип формулируем как принцип

возможных скоростей:

...для равновесия изменяемой механической системы, которая находится под действием ряда сил, включая и силы инерции, необходимо, чтобы сумма мгновенных мощностей всех этих сил была равна нулю.

$$\sum_{i=1}^k N_i = \sum_{i=1}^k P_i V_i \cos(\vec{P}_i \wedge \vec{V}_i) = 0,$$

где P_i — активная сила, приложенная к i -й точке системы (механизма); V_i — возможная скорость точки приложения силы P_i ; $\alpha = (\vec{P}_i \wedge \vec{V}_i)$ — угол между направлениями векторов \vec{P}_i и \vec{V}_i ; N_i — мгновенная мощность силы P_i .

Все связи, наложенные на систему, являются идеальными и стационарными.

Способ определения мгновенной мощности силы, предложенный Жуковским Н.Е., формулируется в виде теоремы:

если силу, приложенную к какой-либо точке плоского механизма, перенести параллельно самой себе, то момент этой силы относительно полюса плана скоростей будет пропорционален ее мощности.

Покажем это:

К звену АВ, имеющему мгновенную угловую скорость ω_1 , приложена сила \vec{P} .

Строим план скоростей звена в масштабе μ_v . Прикладываем в точку В плана скоростей силу P , повернутую на 90° (в любую сторону). Момент этой силы P относительно полюса P_v плана скоростей будет:

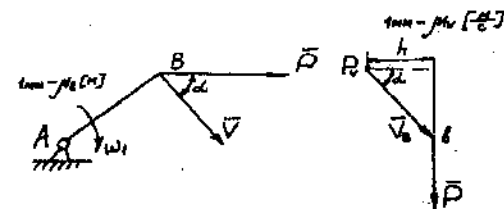
$$P \cdot h = P(\overline{ab}) \cos \alpha = P \frac{V_B}{\mu_v} \cos \alpha,$$

где $P V_B \cos \alpha = N_P$ — мощность силы P .

Следовательно, $P \cdot h = \frac{N_P}{\mu_v}$ — момент силы относительно полюса плана скоростей пропорционален ее мгновенной мощности.

На основании изложенного методика определения P_y или M_y механизма выглядит так:

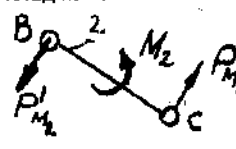
1. Строится план скоростей механизма, который поворачивают на угол 90° градусов (в любую сторону).



2. Определяют абсолютные скорости точек приложения всех активных сил, действующих на звенья механизма, включая моменты инерции и моменты пар сил инерции.

3. К концам этих абсолютных скоростей прикладывают активные силы, включая силы инерции и моменты пар сил инерции.

Если на звено действует момент, то на повернутый план скоростей можно переносить пару сил (точнее, каждую составляющую этой пары отдельно) или можно приложить момент. При этом величина прикладываемого момента должна равняться:



$$M_i^o = M_i \frac{l_i^o}{l_i}; \quad P_{M_2}' = P_{M_2}'' = \frac{M_2}{l_{BC}},$$

где l_i^o - отрезок в [мм] на плане скоростей; соответствующий ему l_i на схеме в [м].

Знак момента сохранится, если расположение букв осталось прежним на плане, если они поменялись в расположении, то меняется и направление "знак" момента.

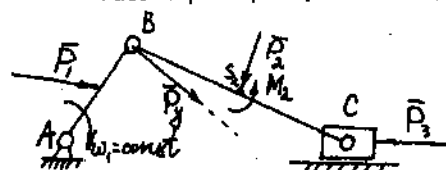
4. Составляют уравнение равновесия плана скоростей (который уподобляется многоплечему жесткому рычагу) в форме моментов относительно полюса плана скоростей.

Направлением и точкой приложения уравновешивающей силы на ведущем звене (а значит, и на плане скоростей) мы задаемся. Искомой будет величина этой силы.

Полученное уравнение решают относительно P_y (M_y).

(Можно поворачивать на $\angle 90^\circ$ не план скоростей, а все прикладываемые силы).

Рассмотрим пример.



Дано: схема механизма в μ , P_1, P_2, P_3 и M_2 .

Найти: P_y .

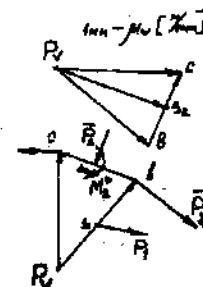
Строим в масштабе μ_v план скоростей, который поворачиваем на 90° градусов, как

показано на схеме, прикладываем в соответствующие точки повернутого плана скоростей все внешние силы и моменты пар сил.

Запишем уравнение равновесия плана скоростей:

$$P_y h_{p_y} + P_1 h_{p_1} - P_2 h_{p_2} - P_3 h_{p_3} + M_2 \frac{bc}{l_{BC}} = 0$$

$$P_y = \frac{-P_1 h_{p_1} + P_2 h_{p_2} + P_3 h_{p_3} - M_2 \frac{bc}{l_{BC}}}{h_{p_y}}$$



3.7. Аналитический метод силового расчета шарнирно-рычажных механизмов 2-го класса

3.7.1. Исходные предпосылки и основные положения метода

Аналитическая кинетостатика базируется на аналитической кинематике. Следовательно, либо должны совпадать системы координат при силовом расчете и кинематическом анализе аналитическими методами, либо должны быть даны условия перехода от одной системы к другой.

Условие статической определимости требует, чтобы силовой анализ выполнялся по структурным группам, а его последовательность была обратна формуле строения механизма.

Все активные силы (силы веса, сопротивления, движущие и т.д.) должны быть заданы своими проекциями на оси координат. Это же требование относится и к силам инерции, главный вектор которых в случае плоских механизмов будет задан так:

$$\bar{P}_{u_i}^x = -m_i \ddot{x}_{S_i}, \quad \bar{P}_{u_i}^y = -m_i \ddot{y}_{S_i}, \quad (3.22)$$

а главный момент i -го звена:

$$\bar{M}_{u_i} = -J_{S_i} \ddot{\varphi}_i = -J_{S_i} \ddot{\psi}_i. \quad (3.23)$$

Из выражений (3.22) и (3.23) следует, что действительное направление проекций главного вектора сил инерции противоположно знаку второй производной от координат центра масс звена, а направление главного вектора-момента - противоположно второй производной от угла поворота звена.

Реакции в кинематических парах необходимо также задавать проекциями на оси координат.

Условимся за положительное направление проекции реакции принимать то направление, которое совпадает с направлением данной оси координат.

Это же условие сохраним и при переходе от одной структурной группы к другой, учитывая, что в соответствии с законом действия и противодействия реакция звена на звено равна ей и противоположно направлена.

В графоаналитической кинетостатике было показано, что для структурных групп 2-го класса, состоящих из двух звеньев, необходимо удовлетворить 6 условиям равновесия. Очевидно, что и в аналитическом методе это условие остается справедливым.

Таким образом, принципиальные отличия аналитического метода от графоаналитического сводятся к двум моментам:

1. Все силы, включая и силы инерции и реакции связей, задаются в проекциях на оси координат;

2. Условия равновесия структурных групп составляются не в векторной форме, а относительно выбранной системы координат.

3.7.2. Аналитическое задание сил сопротивления (движущих сил)

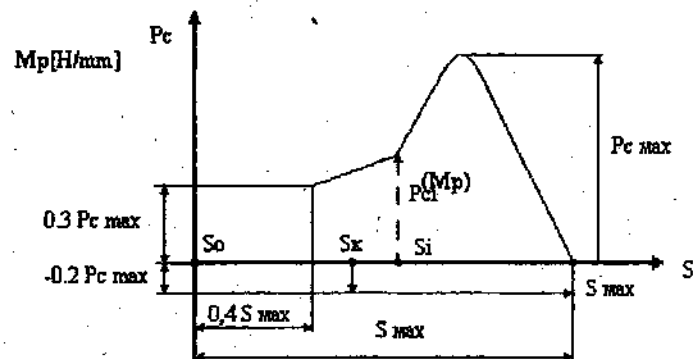
Механические характеристики машин чаще всего определяются на опытных образцах экспериментально. Они могут быть представлены таблично или графически. В случае табличного задания вопрос их аналитического представления не возникает. Важно лишь указать, что для сил сопротивления направление противоположно скорости звена, а для сил движущих - совпадает с этим направлением.

В случае графического задания возможны два пути. Первый предполагает возможность составления аналитического участка заданной диаграммы. Этот путь достаточно сложен и практически мало используется. Второй путь - табулирование заданной диаграммы - сводит вопрос к нижеизложенному.

Рассмотрим, как осуществляется табулирование на примере. Вычерчиваем заданную диаграмму. Определяем масштабы по осям P и S . Откладываем на оси абсцисс равные отрезки пути заданной точки в масштабе μ_s . Это точки S_k , S_i .

Восстанавливаем в этих точках ординаты $P_C^{(\mu_P)}$ и находим значения сил:

$$P_{Ci} = P_{Ci}^{(\mu_P)} \cdot \mu_P.$$



Составляем таблицу значений P_{Ci}

Номер положения	1	2	3	4
$P_{Ci} \sim Y_i$				

Иногда, как в рассматриваемом примере, возможно смешанное задание сил сопротивления:

$$S_0 < S \leq 0,4 S_{max} \quad P_C = 0,3 P_{Cmax}, \quad (3.24)$$

$$\dot{S} > 0$$

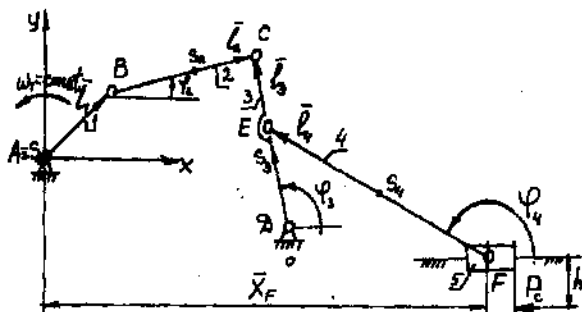
$$0,4 S_{max} \leq S < S_{max} \quad (P_C \text{ см. в таблице}), \quad (3.25)$$

$$0 < S < S_{max} \quad P_C = -0,2 P_{Cmax}. \quad (3.26)$$

$$\dot{S} < 0$$

3.7.3. Силовой расчет групп 2-го класса 1 и 2-го видов механизма 1-го класса аналитическим методом на примере механизма пресса

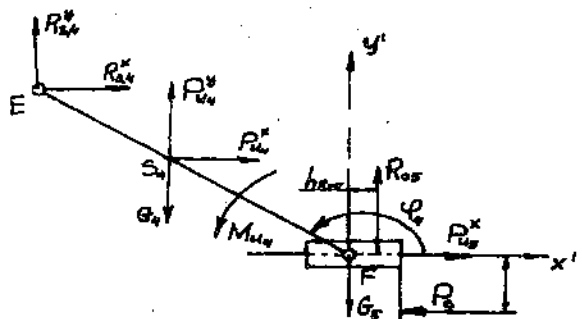
Пусть дан механизм, для которого разработан алгоритм кинематического анализа. Следовательно, определены углы: $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, а также координаты точек S_2, S_3, S_4, F .



Механизм находится в вертикальной плоскости, т.е. ось AY вертикальна. Известны скорости и ускорения точек звеньев. Сила P задана таблично и приложена на расстоянии h от направляющей звена 5 параллельно ей. Закон движения входного звена 1 задан: $\omega_1 = \text{const}$. Заданы также массы звеньев и их центральные моменты инерции. Трение отсутствует.

Требуется составить алгоритм кинетостатического расчета для любого положения механизма.

Структурный анализ показывает, что механизм образован механизмом 1-го класса (звенья 0-1), группой 2-го класса 1-го вида (зв. 2-3) и группой 2-го класса 2-го вида (зв. 4-5).



Вычерчиваем отдельно группу звеньев 4-5. Прикладываем к ней силы веса G_4 и G_5 , силу сопротивления P , проекции главного вектора сил инерции и главный вектор-момент сил инерции, а также реакции со стороны отброшенных звеньев.

Выбираем вспомогательную систему координат $X'Y'$ и составляем условия равновесия группы.

$$\sum P_i^x = R_{3,4}^x + P_{И4}^x + P_{И5}^x - P_c = 0, \quad (3.27)$$

$$\sum P_i^y = R_{3,4}^y + R_{05}^y + P_{И4}^y - G_4 - G_5 = 0, \quad (3.28)$$

$$\sum M_F(P_i) = -R_{3,4}^y l_4 \cos \varphi_4 - R_{3,4}^x l_4 \sin \varphi_4 - (P_{И4}^y - G_4) l_{FS_4} \cos \varphi_4 - P_{И4}^x l_{FS_4} \sin \varphi_4 + M_{И4} - P_c h + R_{05}^y h_{R_{05}} = 0. \quad (3.29)$$

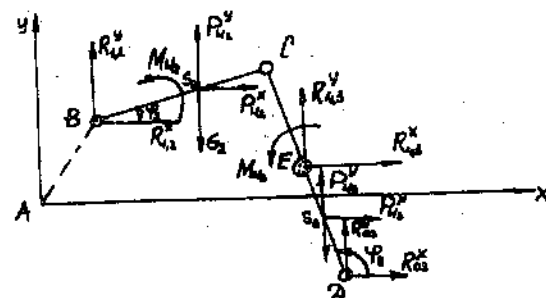
Для получения остальных условий равновесия отбрасываем звено 5 и составляем условия равновесия звена 4:

$$\sum P_{i(4)}^x = R_{3,4}^x + P_{И4}^x + R_{5,4}^x = 0, \quad (3.30)$$

$$\sum P_{i(4)}^y = R_{3,4}^y + P_{И4}^y - G_4 + R_{5,4}^y = 0, \quad (3.31)$$

$$\sum M_F(P_i)_4 = -R_{3,4}^y l_4 \cos \varphi_4 - R_{3,4}^x l_4 \sin \varphi_4 - (P_{И4}^y - G_4) l_{FS_4} \cos \varphi_4 - P_{И4}^x l_{FS_4} \sin \varphi_4 + M_{И4} = 0. \quad (3.32)$$

Из (3.27), содержащего одно неизвестное, находим $R_{3,4}^x$. Подставляя его в (3.32), определим $R_{3,4}^y$. Далее из (3.28) определяем R_{05}^y , а из (3.30) и (3.31) определяем $R_{5,4}^x$ и $R_{5,4}^y$. Наконец из (3.29) находим $h_{R_{05}}$. Все шесть неизвестных компонент реакций связей найдены. Теперь рассмотрим группу звеньев (2-3):



$$\sum P_i^x = R_{1,2}^x + P_{12}^x + R_{4,3}^x + P_{43}^x + R_{03}^x = 0, \quad (3.33)$$

$$\sum P_i^x = R_{1,2}^x + P_{12}^x + R_{4,3}^x + P_{43}^x + R_{03}^x = 0, \quad (3.33)$$

$$\sum P_i^Y = R_{12}^Y + P_{12}^Y - G_2 + R_{43}^Y + P_{43}^Y + R_{63}^Y - G_3 = 0, \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_A(P_i) = & R_{1,2}^Y x_B - R_{1,2}^X y_B + (P_{12}^Y - G_2) x_{S_2} - P_{12}^X y_{S_2} + R_{4,3}^Y x_E - \\ & - R_{4,3}^X y_E + (P_{17}^Y - G_3) x_{S_1} - P_{17}^X y_{S_1} + R_{03}^Y x_D - R_{03}^X y_D + M_{12} + M_{13} = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

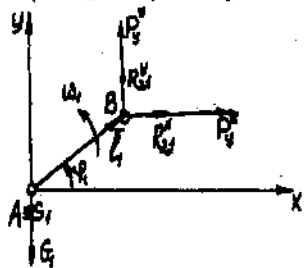
$$\sum P_{i(2)}^x = R_{1,2}^x + P_{H2}^x + R_{3,2}^x = 0, \quad (3.36)$$

$$\sum P_{ij(2)}^Y = R_{12}^Y + P_{42}^Y - G_2 + R_{32}^Y = 0, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_A(P_1)_{(2)} = & R_{1,2}^Y x_B - R_{1,2}^X y_B + (P_{n2}^Y - G_2) x_{S_2} - P_{n2}^X y_{S_2} + \\ & + R_{3,2}^Y x_C - R_{3,2}^X y_C + M_{n2} = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Разумеется, можно было существенно упростить задачу, введя как и ранее вспомогательную систему координат, например ХДУ, но в случае машинного счета это принципиального значения не имеет.

Переходим к расчету механизма 1-го класса.

 $R_{2,1}^x$ и $R_{2,1}^y$, а также силу веса G_1 .

Приложим неизвестную уравнивающую силу, показав ее в проекциях P_v^x и P_v^y .

Составляем условие равновесия входного звена:

$$\sum P_l^x = R_{2,1}^x + P_v^x + R_{0,1}^x = 0, \quad (3.39)$$

$$\sum P_l^y = R_{2,1}^y + P_V^y - G_1 + R_{01}^y = 0, \quad (3.40)$$

$$\sum M_A(P_i) = (P_y^y + R_{2,1}^y)_1 \cos \varphi_1 - (P_y^x + R_{2,1}^x)_1 \sin \varphi_1 = 0. \quad (3.41)$$

Дополнительным условием, необходимым для решения системы, является выбор направления P_y . Пусть P_y перпендикулярна \vec{I}_1 , тогда :

$$\frac{p_y^y}{p_y^x} = -\operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_1) . \quad (3.42)$$

Теперь система уравнений имеет единственное решение, определяющее $R_{01}^x, R_{01}^y, p_y^x, p_y^y$.

Наиболее просто аналитически определяется уравнивающая сила по принципу возможных перемещений.

Пусть звено 1 получило возможность перемещения $d\varphi_1$. Тогда звенья 2, 3 и 4 повернутся на углы $d\varphi_2$, $d\varphi_3$, $d\varphi_4$ соответственно. Точки S_2 , S_3 , S_4 и F получат перемещения ds_2 , ds_3 , ds_4 и ds_F , которые можно задать проекциями на оси координат ds_2^x ; ds_2^y и т.д.

Определим сумму работ всех сил на возможных перемещениях:

а) работа сил $dA_1 = \sum P_i dS_i$; б) работа моментов $dA_2 = \sum M_i d\varphi$;

Полная элементарная работа всех сил и моментов пар сил :

$$dA = \sum P_i dS_i + \sum M_i dq_i, \quad (3.43)$$

Дифференцируя по времени, получим :

$$dN = \frac{dA}{dt} = \sum P_i V_i + \sum M_i \omega_i = \sum P_i S_i + \sum M_i \phi_i. \quad (3.44)$$

По условию, если ко всем силам добавить уравнивающую, то механизм будет в равновесии, а это значит, что $dN=0$, тогда из условия :

$$\sum P_i S_i + \sum M_i \dot{\psi}_i = 0, \quad (3.45)$$

легко найти уравнивающую силу.

Так, для рассматриваемого примера условие (3.45) имеет вид:

$$P_{y1}\dot{\omega}_1 + M_{12}\dot{\varphi}_2 + (P_{y12} - G_2)\dot{y}_{s2} + P_{12}^x\dot{x}_{s2} + M_{13}\dot{\varphi}_3 + (P_{y13} - G_3)\dot{y}_{s3} + (3.46)$$

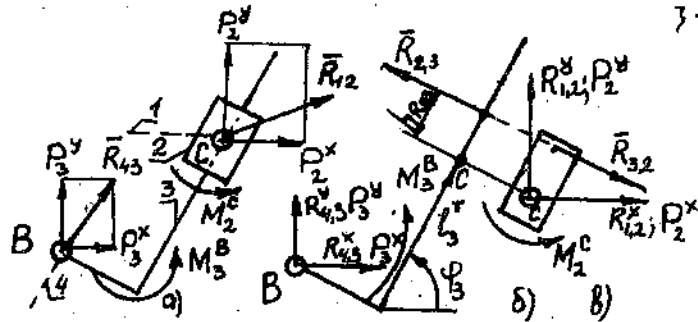
$$+ P_{13}^x\dot{x}_{s3} + M_{14}\dot{\varphi}_4 + (P_{y14} - G_4)\dot{y}_{s4} + P_{14}^x\dot{x}_{s4} + (P_{15} - P_C)\dot{x}_F = 0.$$

Из полученного выражения легко определить уравнивающую силу P_y как единственный неизвестный параметр уравнения.

3.7.4. Алгоритм силового расчета группы 2-го класса 3-го вида аналитическим методом

Для этой группы алгоритм будет иметь наиболее простую форму, если силы, действующие на кулису 3, привести к точке В, а силы, действующие на камень кулисы 2, к точке С, см схему (а). Входными данными для этой группы являются: $P_2^x, P_2^y, M_2^C, P_3^x, P_3^y, M_3^B$, т.е. система сил действующих на звенья 2 и 3. Модуль l_3^T и определяемый в результате кинематического анализа угол φ_3 вектора l_3 .

Требуется определить: $R_{1,2}^x, R_{1,2}^y, R_{2,3}, h_{R2,3}, R_{4,3}^x, R_{4,3}^y$, а также $R_{1,2}, \theta_{1,2}; R_{4,3}, \theta_{4,3}$, (см. схему б и в).



Рассмотрим условие равновесия камня и условие равновесия кулисы совместно в виде сумм моментов, действующих на них усилий относительно точек С и В соответственно. В результате получаем: $R_{2,3} = R_{3,2}$ и $h_{R2,3}$, которое определяет точку приложения $R_{3,2}$.

$$R_{2,3} = -\frac{M_2^C + M_3^B}{l_3^T}; \quad h_{R2,3} = \frac{M_2^C}{R_{2,3}}.$$

Далее запишем условия равновесия камня 2 и кулисы 3 в виде суммы проекций всех сил, действующих на каждое из этих звеньев:

$$\begin{cases} R_{1,2}^x = -(R_{2,3} \sin \varphi_3 + P_2^x) \\ R_{1,2}^y = +R_{2,3} \cos \varphi_3 - P_2^y \end{cases}$$

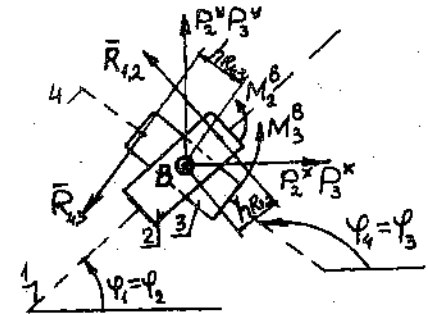
$$\begin{cases} R_{4,3}^x = +R_{2,3} \sin \varphi_3 - P_3^x \\ R_{4,3}^y = -(R_{2,3} \cos \varphi_3 + P_3^y) \end{cases}$$

Полученные уравнения позволяют определять $R_{1,2}^x, R_{1,2}^y, R_{4,3}^x, R_{4,3}^y$ и затем соответственно $\theta_{1,2}$ и $\theta_{4,3}$, а также $R_{1,2}$ и $R_{4,3}$. Таким образом полученные выше уравнения являются алгоритмом расчета группы 3 вида.

3.7.5 Алгоритм силового расчета группы 2-го класса 4-го вида аналитическим методом

Приводим все силы, действующие на звенья группы к точке В. Входными данными для этой группы являются: $P_2^x, P_2^y, P_3^x, P_3^y, M_2^B, M_3^B$ т.е. система сил, действующих на звенья 2 и 3, а также $\varphi_1 = \varphi_2; \varphi_4 = \varphi_3$.

Требуется определить: $R_{1,2}; R_{4,3}; h_{R1,2}; h_{R4,3}; R_{3,2} = R_{2,3}$ и $\theta_{3,2}$.



Для определения реакций $R_{1,2}$ и $R_{4,3}$ составляем условия равновесия группы в проекциях на оси координат, откуда будем иметь:

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= \frac{(P_2^x + P_3^x) \cos \varphi_3 + (P_2^y + P_3^y) \sin \varphi_3}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)}; \\ -R_{4,3} &= \frac{(P_2^x + P_3^x) \cos \varphi_2 + (P_2^y + P_3^y) \sin \varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)}. \end{aligned}$$

Плечи $h_{R1,2}; h_{R4,3}$, определяющие положения точек приложения реакций $R_{1,2}$ и $R_{4,3}$ относительно точки В, находим из условий равновесия каждого из звеньев в форме уравнений моментов относительно В:

$$h_{R1,2} = \frac{-M_2^B}{R_{1,2}}; \quad h_{R4,3} = \frac{-M_3^B}{R_{4,3}}.$$

Чтобы определить реакции в шарнире В отбрасываем звено 3 и его действие заменяем реакциями $R_{3,2}^x$ и $R_{3,2}^y$. Далее составляем условия равновесия звена 2 в проекциях на оси координат и в результате будем иметь:

$$R_{3,2}^x = R_{1,2} \sin \varphi_2 - P_2^x,$$

$$R_{3,2}^y = -R_{1,2} \cos \varphi_2 - P_2^y.$$

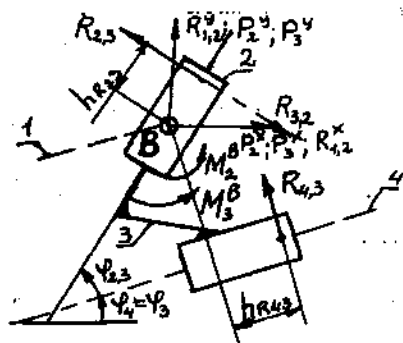
Сам вектор $\vec{R}_{3,2}$ и его положение в полярных координатах определяются зависимостями:

$$R_{3,2} = \sqrt{(R_{3,2}^x)^2 + (R_{3,2}^y)^2},$$

$$\theta_{3,2} = \arccos \left(\frac{R_{3,2}^x}{R_{3,2}} \right) \text{sign} R_{3,2}^y.$$

Таким образом полученные выше уравнения являются алгоритмом расчета группы 4-го вида.

3.7.6. Алгоритм силового расчета группы 2-го класса 5-го вида аналитическим методом



Приводим все силы, действующие на звенья группы к точке В. Входными данными для этой группы являются: $P_2^x, P_2^y, P_3^x, P_3^y, M_2^B, M_3^B$, т.е. система сил, действующих на звенья 2 и 3, а также $\varphi_{2,3}$ и $\varphi_4 = \varphi_3$ (см. схему).

Отбросим звено 2 и составляя условие равновесия кулисы 3 в форме проекций на оси координат, получим выражения для определения реакций $R_{2,3}$ и $R_{4,3}$:

$$R_{2,3} = \frac{P_3^x \cos \varphi_3 + P_3^y \sin \varphi_3}{\sin \varphi_{2,3}};$$

$$R_{4,3} = \frac{P_3^x \cos(\varphi_3 + \varphi_{2,3}) + P_3^y \sin(\varphi_3 + \varphi_{2,3})}{\sin \varphi_{2,3}}.$$

Из рассмотрения условия равновесия группы и условия равновесия звена 2 в форме уравнений моментов относительно точки В получаем выражения для определения плеч этих реакций:

$$h_{R_{2,3}} = \frac{M_2}{R_{2,3}}; h_{R_{4,3}} = -\frac{M_3 + M_2}{R_{4,3}}.$$

Из условия равновесия звена 2 в проекциях на оси координат определяем реакции $R_{1,2}^x$ и $R_{1,2}^y$:

$$R_{1,2}^x = -[R_{2,3} \sin(\varphi_3 + \varphi_{2,3}) + P_2^x],$$

$$R_{1,2}^y = R_{2,3} \cos(\varphi_3 + \varphi_{2,3}) - P_2^y.$$

Сам вектор $R_{1,2}$ и его положение в полярных координатах определяются выражениями:

$$R_{1,2} = \sqrt{(R_{1,2}^x)^2 + (R_{1,2}^y)^2},$$

$$\theta_{1,2} = \arccos \left(\frac{R_{1,2}^x}{R_{1,2}} \right) \text{sign} R_{1,2}^y.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Введение.....	4
1. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ.....	7
1.1. Цели и задачи структурного исследования механизмов.....	7
1.2. Звенья и их классификация.....	7
1.3. Кинематические пары и их классификация.....	10
1.4. Кинематические цепи и их классификация.....	12
1.5. Структурная формула кинематической цепи общего вида и плоской кинематической цепи (К.Ц.).....	13
1.6. Пассивные связи и лишние степени свободы. Сложные шарниры.....	16
1.7. Замена высших кинематических пар цепями из низших. Структурное и кинематическое условия замены.....	17
1.8. Общий принцип образования механизмов по Ассур Л.В. Понятие механизма первого класса. Понятие структурной группы.....	21
1.9. Классификация структурных групп Ассура. Классификация механизмов.....	22
1.10. Кинематическая, заменяющая и структурная схемы механизма. Формула строения механизма.....	26
1.11. Методика структурного анализа и синтеза плоских механизмов.....	27
1.12. Примеры структурного анализа плоских механизмов.....	28
1.13. Структурный синтез механизмов высших классов.....	31
2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ.....	37
2.1. Цели, задачи и методы кинематического анализа механизмов.....	37
2.2. Планы положений механизма. Определение траекторий точек звеньев механизмов.....	41

2.3. Решение задачи о скоростях и ускорениях графическим методом (графическое дифференцирование).....	44
2.4. Решение задачи о скоростях и ускорениях графоаналитическими методами.....	47
2.5. Графоаналитическая кинематика структурных групп 2-го класса.....	60
2.6. Кинематика механизмов 1-го класса.....	76
2.7. Кинематическое исследование плоских рычажных механизмов аналитическим методом.....	79
3. СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ.....	92
3.1. Цели, задачи и методы силового анализа.....	92
3.2. Условие статической определимости плоской кинематической цепи.....	93
3.3. Определение сил инерции звеньев механизмов.....	94
3.4. Графоаналитическая кинематика структурных групп 2-го класса (расчет групп 1-, 2-, 3-, 4- и 5-го видов).....	97
3.5. Силовой расчет механизмов 1-го класса. Понятие уравнивающих сил и момента.....	103
3.6. Определение уравнивающей силы механизма методом рычага Н.Е. Жуковского.....	106
3.7. Аналитический метод силового расчета шарнирно-рычажных механизмов 2-го класса.....	109

